

PRÁCTICA 9: DIFERENCIACIÓN

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que f' es acotada. Probar que f es uniformemente continua.
2. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$ tal que los límites laterales de f' en x_0 existen, son finitos e iguales. Probar que f es derivable en x_0 .
3. Sean $\alpha < a < b < \beta$ y $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (α, β) tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Probar que:

- (a) Si $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- (b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.
- (c) Si $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, t^2 \operatorname{cos} \frac{1}{t}) & \text{si } 0 < t < 1, \\ (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0, \end{cases}$$

entonces g es derivable en $(-1, 1)$ pero $g'((-1, 1))$ no es conexo.

4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Probar que si f es diferenciable en x_0 , entonces existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B(x_0, \delta) \subseteq A$ y

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\| \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta).$$

5. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al segmento S que une x_1 y x_2 . Mostrar que:

- (a) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe x en el segmento S tal que

$$f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2).$$

- (b) Sin embargo, esto es falso para una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- (c) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A .

7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$$

para cada par de puntos $x, y \in A$. Probar que f es constante.

8. Probar que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto de \mathbb{R}^n y con derivadas parciales acotadas es continua.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función tal que $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que:

(a) f no es inyectiva.

(b) El jacobiano de f es no nulo en todo punto de \mathbb{R}^2 , de manera que f es localmente inyectiva.

10. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Probar que $f'(0) = 1$ y f' es acotada en $(-1, 1)$, pero sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de 0. En particular, la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa.

11. Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo U . Probar que:

(a) f es abierta.

(b) Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es discreto en U .

12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

(a) Determinar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de $(1, 0)$ y una función $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\phi(1, 0) = 2$ y

$$F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0 \text{ para todo } (x, z) \in W.$$

(b) Mostrar que

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - y \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x \text{ en } W.$$

13. Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1 + x) + y^2 z = 1, \end{cases}$$

define dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno del punto $(0, 1, 1)$. Sean $C \subseteq \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en forma paramétrica por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, y la función $g(x, y, z) = 2xyz + z \tan x$. Calcular la derivada direccional de g en $(0, 1, 1)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 0$.

14. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , $n > 1$. Probar que si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$ y $\nabla f(p) \neq 0$, entonces f se anula en infinitos puntos de \mathbb{R}^n . ¿Y si solo le pedimos que f sea continua y que exista $\nabla f(p)$?