Cálculo Avanzado - Segundo Cuatrimestre de 2016

Práctica 8: Espacios de funciones

---

1. i) Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$.
   (a) $f_n(x) = x^n, \quad A = (-1,1]$.
   (b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad A = (1,+\infty)$.
   (c) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n, \quad A = [0,1]$.

   ii) Para a) demostrar que la convergencia es uniforme en $A = (0,1/2]$, idem en b) con $A = [2,5]$. ¿Es uniforme la convergencia de c) en A o en algún sub-intervalo de A?

2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:
   i) $f_n(x) = \dfrac{\sin\, nx}{n}, \; x \in \mathbb{R}$.
   ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right), \; x \in \mathbb{R}$.
   iii) $f_n(z) = \dfrac{n}{n+1}z, \; z \in \mathbb{C}$.
   iv) $f_n(z) = nz^2, \; z \in \mathbb{C}$.
   v) $f_n(z) = z^n$, definidas en $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$

3. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.
   i) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?
   ii) Probar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{C}$, entonces $f \in B(X)$.
   iii) Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y sólo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.
   iv) Probar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada.*

4. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$, probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

5. Sea (X,d) un espacio métrico. Si $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n) : X \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $E \subset X$, probar que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente en E. Si además (f_n) y (g_n) son uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)$ es uniformemente convergente. Mostrar con un ejemplo que esta última restricción es necesaria.

6. i) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y f_n' converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y que $f' = g$.

   ii) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones. ¿Bajo qué hipótesis es legítimo derivarla término a término?

   iii) Probar que la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$
   converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero que esto no ocurre para la serie obtenida derivando término a término.

7. Hallar (y justificar) los conjuntos en $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:
   $i)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad ; \quad ii)\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad ; \quad iii)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad iv)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$
   ¿Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término?

8. Consideramos la función dada por la serie:
   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$
   Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1+\varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

9. (Teorema de Dini) Sea K compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ que converge puntualmente a $f \in C(K)$. Para cada $x \in K$ se tiene $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Probar que f_n converge uniformemente en K.

10. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ a $f(x)$.

11. Sean f_n continuas en $[0,1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:
    $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

12. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $X \to Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en X si es equicontinua en x para todo $x \in X$. Por ltimo, decimos que la familia $\mathcal{F}$ es *uniformemente equicontinua* en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

i) Toda familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

ii) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en Y. Si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

iii) Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones de X en Y, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

iv) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas de X en Y que converge uniformemente en X, entonces $\{f_n : n \geq 1\}$ es una familia equicontinua.

v) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones de X en Y uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \to Y$, entonces esa convergencia es uniforme en X.

13. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \geq 1$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\, d\xi$$

para cada $x \in [a, b]$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.