Cálculo Avanzado - Segundo Cuatrimestre de 2016

Práctica 4: Continuidad Uniforme - Completitud

---

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:
   (a) $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$;
   (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$;
   (c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sin(x)$;
   (d) $f_4 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \sin(1/x)$.

2. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.
   (b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

3. Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto no vacío de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(A,x) = \inf\{d(y,x) \mid y \in A\}$ es uniformemente continua.

4. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, $c \geq 0$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface
$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d(x_1,x_2)$$
   para todos $x_1, x_2 \in X$. Probar que f es uniformemente continua.

5. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sucesiones tales que
   (a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$,
   (b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

   entonces f no es uniformemente continua.

6. Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A,B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

7. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X. ¿Sigue valiendo la afirmación si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua pero no uniformemente continua?

8. Sea (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente. Probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

9. Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos, $f : X \to Y$ uniformemente continua y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es de Cauchy. ¿Sigue valiendo necesariamente la afirmación anterior si f es continua pero no uniformemente continua?

10. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. Probar que g no es uniformemente continua, pero si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy entonces $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy.

11. Consideramos el conjunto $C_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ con la distancia

$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

Probar que es un espacio métrico completo.

12. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

13. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sucesiones de Cauchy. Probar que la sucesión $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es convergente.

14. Consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica

$$d'(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Probar que es equivalente a la métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, pero que $\mathbb{R}$ no es completo con la mtrica d'.

15. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $D \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad de que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ converge a un elemento de X. Probar que X es completo.

16. Sean X e Y espacios métricos con Y completo. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \longrightarrow Y$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X.

17. Sean (X,d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

18. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solamente en $\mathbb{Q}$.

    Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

19. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

(a) A es nunca denso;
(b) toda bola abierta B contiene otra bola abierta B_1 tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;
(c) A no es denso en ninguna bola abierta.

20. Sea (X, d) un espacio métrico.

(a) Probar que si A es nunca denso, entonces $X \setminus A$ es denso. ¿Vale la recíproca?
(b) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X \setminus A$ es nunca denso.

21. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

22. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0,1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0,1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0,1], d_\infty)$.
ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.
iii) Probar que el conjunto formado por las funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía tiene interior vacío en $C[a,b]$.

23. Decidir cuáles de las siguientes funciones son contracciones:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \cos(x)$;
(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \cos(\cos(x))$;
(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = e^x$;
(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = e^{-x}$;
(e) $f_5 : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f_5(x) = e^{-x}$.

24. Sea X un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ que verifica que

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

es una contracción. Probar que f tiene un único punto fijo.

25. Sea X un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ sobreyectiva y tal que existe una constante $c > 1$ de manera que para todos $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \geq c \cdot d(x, y).$$

Probar que f tiene un único punto fijo.