Práctica 6 - Espacios L^p

Ejercicio 1. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$.

(a) Probar que si E tiene medida finita entonces $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$.

(b) Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede no valer si E tiene medida infinita.

(c) Probar que vale la recíproca de la afirmación en (a).

Ejercicio 2. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible de medida finita y $f : E \to \mathbb{C}$ medible.

(a) Probar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(b) Mostrar que el límite del ítem anterior puede no valer si la medida de E es infinita.

Ejercicio 3. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Probar que para $1 \leq p, p' \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ se tiene

$$\|f\|_p = \sup_{g\in\mathcal{D}_f(E)} \int_E f(x)g(x)dx$$

donde $\mathcal{D}_f(E) := \{g \in L^{p'}(E) : \|g\|_{p'} \leq 1 \text{ y } \int_E f(x)g(x)dx \text{ existe}\}$.

Ejercicio 4.

(a) Mostrar que la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$h(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

es de clase C^∞.

(b) Probar que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y alguna de las dos funciones tiene soporte compacto entonces $sop(f * g) \subseteq sop(f) + sop(g)$. Concluir que si f y g tienen ambas soporte compacto entonces $f * g$ también. ¿Qué ocurre si ninguna de las dos funciones tiene soporte compacto?

(c) Probar que si $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ son abiertos tales que $\overline{U} \subseteq V$ y U es acotado entonces existe una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C_0^∞ tal que

$$f|_U \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad f|_{\mathbb{R}^n - V} \equiv 0.$$ [1]

Sugerencia. Considerar G abierto que satisfaga $\overline{U} \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq V$ y tomar $f = h_\varepsilon * \chi_G$ para $\varepsilon > 0$ adecuado, donde $h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} h(\frac{x}{\varepsilon})$.

(d) Deducir que C_0^∞ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < +\infty$. ¿Y para $p = +\infty$?

[1] Denotamos por C_0^∞ al conjunto de todas las funciones de clase C^∞ con soporte compacto.

Ejercicio 5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p \leq +\infty$.

(a) Probar que el espacio $L^p(E)$ es completo.

(b) ¿Para qué valores de p es $L^p(E)$ separable?

Ejercicio 6. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ y $h \in \mathbb{R}^n$ definimos la función f_h como

$$f_h(x) := f(x-h).$$

Probar que $f_h \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $\|h\| \to 0$. ¿Es cierto esto para $p = +\infty$?

Ejercicio 7. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq r \leq p \leq s < +\infty$. Probar que para toda $f : E \to \mathbb{C}$ medible se tiene

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s.$$

Ejercicio 8. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para algún $1 \leq p \leq +\infty$ entonces $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E.

(b) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$, $g_n \to g$ en $L^{p'}(E)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces $f_n g_n \to fg$ en $L^1(E)$.

(c) Si $m(E) < \infty$ y $f_n \to f$ en $L^\infty(E)$ entonces $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para todo $1 \leq p \leq +\infty$.

Ejercicio 9. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f_n = \begin{cases} e^n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite en casi todo punto no converge en $L^p([0,1])$ para ningún $1 \leq p \leq +\infty$.

Ejercicio 10. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(E)$ con $1 \leq p < +\infty$.

(a) Probar que si $f \in L^p(E)$ y $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0$ entonces $\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)}$.

(b) Si $f_n \to f$ en casi todo punto de E entonces

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0.$$

Sugerencia. Verificar que la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$$

cae en las hipótesis del Lema de Fatou y aplicarlo.

Ejercicio 11. Sea $k : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $c > 0$ que verifica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dy \leq c \quad \text{ y } \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dx \leq c.$$

Probar que si $1 \leq p < +\infty$ entonces el operador $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$$

está bien definido y es continuo.

Ejercicio 12. Para $1 \leq p < +\infty$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < m(E) < +\infty$ definimos

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{m(E)} \int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$.

(b) $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) Si p' es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces $\displaystyle\frac{1}{m(E)} \int_E |f(x)g(x)|dx \leq N_p[f]N_{p'}[g]$.

(d) $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 13. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < m(E) < +\infty$ y $f \in L^\infty(E)$ con $\|f\|_\infty > 0$. Consideremos la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por

$$a_k = \int_E |f(x)|^k dx.$$

Demostrar que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 14. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ para $1 < p < +\infty$ tal que $f_n \to f$ en casi todo punto.

(a) Probar que si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$ entonces $f \in L^p$ y además vale

$$\int f_n(x)g(x)dx \to \int f(x)g(x)dx$$

para toda $g \in L^{p'}$ con p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(b) ¿Es cierto este resultado para $p = 1$?

Ejercicio 15. Probar que si $f_n \to f$ en L^p con $1 \leq p < +\infty$ y $g_n \to g$ puntualmente con $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty < +\infty$ entonces $f_n g_n \to fg$ en L^p.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible tal que para todo $\alpha > 0$ se tiene

$$\omega(\alpha) = m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}) \leq c(1+\alpha)^{-p}.$$

Probar que $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para $0 < r < p$.

Ejercicio 17. Sea $E = [0, \frac{1}{2}]$. Probar que

(a) $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}(\ln x^{-1})^{-\frac{2}{p}} \in L^p(E)$ para $1 \leq p < +\infty$ pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

(b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para $1 \leq p < +\infty$ pero $g \notin L^\infty(E)$.

Ejercicio 18. Probar que $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ pero que $f \notin L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ para ningún p tal que $1 \leq p < +\infty$ y $p \neq 2$.

Ejercicio 19. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$, demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\|h\|\to+\infty}{\longrightarrow} 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p.$

(b) $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 2\|f\|_p.$

Ejercicio 20.

(a) Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p, p' \leq +\infty$ tales que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Probar que la convolución $f * g$ está bien definida y es una función uniformemente continua y acotada.

(b) Demostrar que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible tal que $0 < |E| < +\infty$ entonces

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

tiene interior no vacío.

Sugerencia: Considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.

Ejercicio 21. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x)dx.$$

Probar que si $f \in L^p$ entonces valen las siguientes afirmaciones:

(a) $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p}\|f\|_p$.

(b) $f_h \in L^p$ y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.

(c) $\|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p}\|f\|_p$ para cada $1 \leq p \leq r$.

(d) $\|f_h - f\|_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ para $1 \leq p < +\infty$.

Ejercicio 22. Sean $1 < p, p' < +\infty$ que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Probar que si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión tal que para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ vale que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$$

entonces $\|f\|_p \leq \liminf_{k\to+\infty} \|f_k\|_p$.