Práctica 5 - Diferenciación

Definición.

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in L^1(K) \text{ para todo } K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compacto}\}$.
- Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se definen las funciones maximales de Hardy-Littlewood como

  i. $M_f^Q(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{m(Q)}\displaystyle\int_Q |f| : Q \text{ es un cubo que contiene a } x\right\}$.

  ii. $M_f^{QC}(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{m(Q)}\displaystyle\int_Q |f| : Q \text{ es un cubo centrado en } x\right\}$.

  iii. $M_f^B(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{m(B)}\displaystyle\int_B |f| : B \text{ es una bola que contiene a } x\right\}$.

  iv. $M_f^{BC}(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{m(B)}\displaystyle\int_B |f| : B \text{ es una bola que centrada en } x\right\}$.

  Cuando escribamos M_f suprimiendo el supraíndice en la notación nos estaremos refiriendo a cualquiera de las cuatro posibilidades.

Ejercicio 1. Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces M_f es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 2. Probar que todas las funciones maximales de Hardy-Littlewood definidas arriba son equivalentes, i.e. existen constantes $C_1, C_2 > 0$ que dependen únicamente de la dimensión n tales que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y cualquier par de maximales consideradas $M_f^{(i)}$ y $M_f^{(j)}$ se verifica

$$C_1 M_f^{(i)} \leq M_f^{(j)} \leq C_2 M_f^{(i)}.$$

Ejercicio 3.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible de diámetro finito. Probar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para $\|x\|$ suficientemente grande vale

$$C_1 m(E)\|x\|^{-n} \leq M_{\chi_E}(x) \leq C_2 m(E)\|x\|^{-n}.$$

(b) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no nula. Probar que existe $C > 0$ tal que si $\|x\| \geq 1$ entonces vale

$$M_f(x) \geq C\|x\|^{-n}.$$

Deducir que $M_f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ a menos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se anule en casi todo punto.

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por la fórmula $f(x) =: \frac{1}{|x|\log^2(|x|^{-1})}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$. Mostrar que f es integrable pero que $M_f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Probar que existe una constante $C > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$m(\{M_f > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| dx.$$

Sugerencia. Considerar $g = f\chi_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}}$ y usar que $|f| \leq |g| + \frac{\alpha}{2}$.

Ejercicio 5. Dada una familia $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ de conjuntos medibles acotados de $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\mathcal{S}$ se *contrae regularmente a* x si verifica

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ con $m(S_i) < \varepsilon$.

(ii) Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$ vale que $m(Q_i) \leq km(S_i)$, donde Q_i denota el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i.

Notar que los conjuntos S_i no necesitan contener a x.

(a) Probar que las siguientes familias se contraen regularmente a x:

- $\mathcal{S}^Q = \{Q : Q \text{ cubo que contiene a } x\}$
- $\mathcal{S}^B = \{B : B \text{ bola que contiene a } x\}$
- $\mathcal{S}^{BC} = \{B(x, r) : r > 0\}$.

(b) Probar que si $\mathcal{S}$ es una familia que se contrae regularmente a x entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{S_i \in \mathcal{S}} \frac{1}{m(S_i)} \int_{S_i} |f(y)| dy \leq C M_f^{QC}(x).$$

(c) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo punto de Lebesgue x de f se tiene

$$\lim_{m(S_i) \to 0} \frac{1}{m(S_i)} \int_{S_i} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

para toda familia $\mathcal{S}$ que se contraiga regularmente a x.

Ejercicio 6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible y acotada tal que $\operatorname{sop}(\phi) \subseteq B(0, 1)$ y $\|\phi\|_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

en todo punto de Lebesgue x de f.

Ejercicio 7. Sea $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible, acotada y de soporte compacto. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sup_{\varepsilon > 0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq C M_f(x),$$

donde $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$.

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular los cuatro números de Dini f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 9. Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 10. Sea $g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y absolutamente continua. Notemos además $c := g(a)$ y $d := g(b)$.

(a) Probar que si $G \subseteq [c,d]$ es abierto entonces $m(G) = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)dx$.

(b) Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Mostrar que si $E \subseteq [c,d]$ y $m(E) = 0$ entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.

(c) Probar que si $E \subseteq [c,d]$ es medible entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y además se tiene
$$m(E) = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx.$$

(d) Probar que si f es medible y no negativa sobre $[c,d]$ entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a,b]$ y vale
$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx.$$

Ejercicio 11. Sean $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua y g integrable sobre $[a,b]$. Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx$$

donde
$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$