Práctica 4 - Teorema de Fubini

Ejercicio 1.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto medible tal que la sección $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ la sección $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ también tiene medida nula.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y no negativa tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$ la función $y \mapsto f(x, y)$ es finita en casi todo punto. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ la función $x \mapsto f(x, y)$ es finita en casi todo punto.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funciones medibles.

(a) Probar que $s : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $s(x, y) = f(x) + g(y)$ es medible.

(b) Probar que $p : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $h(x, y) = f(x)g(y)$ es medible.

(c) Concluir del ítem anterior que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles entonces su producto cartesiano

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \, , \, y \in E_2\}$$

es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{n+m}$ y vale que $m(E_1 \times E_2) = m(E_1)m(E_2)$.

Ejercicio 3. Sean $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medible y $h : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que h es integrable si y sólo si f lo es.

Ejercicio 4. Sea $E \subseteq [0, 1]^2$ tal que $m(E_x) = m([0, 1] - E_y) = 0$ para todo $(x, y) \in [0, 1]^2$. Probar que E no es medible.

Ejercicio 5. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ función medible no negativa. Se define la *función de distribución* de f como la función $\omega : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por la fórmula

$$\omega(\alpha) = m(\{x \in E : f(x) > \alpha\}).$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) ω es monótona decreciente y continua a derecha.

(b) $\lim_{\alpha \to \alpha_0^-} \omega(\alpha) \geq m(\{x \in E : f(x) \geq \alpha_0\})$ para todo $\alpha_0 > 0$.

(c) ω continua en $\alpha_0 \Rightarrow m(\{x \in E : f(x) \geq \alpha_0\}) = m(\{x \in E : f(x) > \alpha_0\})$.

(d) $\displaystyle\int_E f(x)dx = \int_0^\infty \omega(\alpha)d\alpha.$

(e) Para todo $p > 0$ vale

$$\int_E (f(x))^p dx = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\omega(\alpha)d\alpha.$$

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $\alpha \in (0,1)$ que satisface

$$|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$$

para todo $t \geq 0$. Sea $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$G(x,t) = e^{-xt}f(t).$$

Probar que G es medible e integrable.

Ejercicio 7. Sea $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la fórmula $k(x,y) = xy$.

(a) Probar $k^{-1}(E)$ es medible para todo $E \subseteq \mathbb{R}$ medible.

(b) Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible entonces $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula $h(x,y) = f(xy)$ también es medible.

Ejercicio 8. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ medibles y $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como $h(x) = m((A-x)\cap B)$. Probar que h es medible y satisface $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = m(A)m(B)$.

Ejercicio 9. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Se define la *transformada de Fourier de* f como la función $T_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$T_f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i<\xi,x>} f(x)dx.$$

(a) Probar que la transformada se encuentra bien definida, i.e. la función $e^{-2\pi i<\xi,x>}f(x)$ es medible e integrable para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo.

(b) Demostrar las siguientes afirmaciones:

(i) T_f es acotada y uniformemente continua.

(ii) **Lema de Riemann-Lebesgue**. $\lim_{|\xi|\to+\infty} T_f(\xi) = 0$.

(iii) Si $f(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ con cada $f_i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable entonces $T_f(\xi) = \displaystyle\prod_{i=1}^n T_{f_i}(\xi_i)$.

(iv) Si $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces $T_{f*g} = T_fT_g$.

Ejercicio 11. Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable tal que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{R} - [a, b]$. Dado $h > 0$ se define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por la fórmula

$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Probar que g es medible y satisface

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Ejercicio 12. Sea F un subconjunto cerrado de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y denotemos por $d(\cdot, F)$ a la función de distancia a F correspondiente. Dado $\lambda > 0$ definimos $M_\lambda : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ por la fórmula

$$M_\lambda(x) := \int_a^b \frac{d(y, F)^\lambda}{|x - y|^{1+\lambda}} dy.$$

(a) Probar que M_λ es medible.

(b) Probar que $M_\lambda(x) = +\infty$ para todo $x \in [a, b] - F$.

(c) Probar que M_λ es integrable sobre F y satisface la estimación

$$\int_F M_\lambda(x)dx \leq \frac{2}{\lambda} m([a, b] - F).$$

Deducir que M_λ es finita en casi todo punto de F.

Ejercicio 13. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{sen(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Sugerencia. Observar que para todo $x > 0$ vale la identidad $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$.