Práctica 3 - Integral de Lebesgue

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible. Probar que para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible

$$\int_E f(x)dx = \sup \left\{ \int_E \varphi(x)dx : 0 \leq \varphi \leq f \,,\, \varphi \text{ simple} \right\}.$$

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

(a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Concluir que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx.$$

(b) Probar que si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ entonces valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

(a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Concluir que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ vale

$$\int_E f(ax)dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{aE} f(x)dx.$$

(b) Probar que si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ entonces valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 4. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que $\int_A f(x)dx = 0$ para todo $A \subseteq E$ medible. Probar que $f = 0$ en casi todo punto de E.

Ejercicio 5. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que

$$\left| \int_E f(x)dx \right| = \int_E |f(x)|dx.$$

Mostrar que f tiene signo constante en casi todo punto de E.

Ejercicio 6. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y f integrable sobre E.

(a) Probar que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre E.

(b) ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 7.

(a) Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existe g continua e integrable sobre $\mathbb{R}_{>0}$ tal que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ que verifica

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} |g(x_n)| = +\infty.$$

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\geq k\}} |f(x)|dx = 0.$$

Ejercicio 9.

(a) Sea $(E_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ una familia de conjuntos medibles contenidos en el intervalo $[0,1]$. Probar que si para cada $x \in [0,1]$ el conjunto $A_x = \{k \in \{1,\ldots,n\} : x \in E_k\}$ tiene por lo menos q elementos entonces existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $m(E_k) \geq \frac{q}{n}$.

(b) Sean $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^m$ y un número natural k. Probar que si definimos

$$G = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in E_n \text{ para al menos } k \text{ valores de } n\}$$

entonces G es medible y $m(G) \leq \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

Ejercicio 10.

(a) Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

(b) Mostrar que en el Lema de Fatou la hipótesis de que las funciones en la sucesión sean no negativas es necesaria.

Ejercicio 11. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables definidas sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ que converge en casi todo punto de E a una cierta función f.

(a) Probar que si $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k(x)|dx < +\infty$ entonces f es integrable.

(b) Probar que si $0 \leq f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Ejercicio 12.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de funciones medibles no negativas definidas sobre E. Mostrar que si f_1 es integrable entonces

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k < +\infty.$$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x.$$

Sugerencia. Considerar la función $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ definida sobre $(1, x)$.

Ejercicio 13. Probar que si $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

Ejercicio 14. Probar que si $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0.$$

Ejercicio 15. Sean $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$ que converge en casi todo punto a una cierta función f y tal que existe g integrable que verifica $|f_k| \leq g$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si para $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ definimos $E_j = \bigcup_{k\geq j}\{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ entonces $\lim_{j\to+\infty} m(E_j) = 0$.

Ejercicio 16. Sean $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $g(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ y $f = g'$. Probar que f es continua y existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$ pero que no es integrable.
Sugerencia. Mostrar que

$$|f(x)| \geq 2x^{-1}|\cos(x^{-2})| - 2x \geq \frac{x^{-1}}{2}$$

para todo $x \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{\sqrt{(2n+\frac{1}{3})\pi}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{(2n-\frac{1}{3})\pi}}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 17. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_E |f_k(x)|dx\right] < +\infty.$$

Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_E f_k(x)dx\right].$$

Ejercicio 18. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n.$$

Probar que

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx \;\neq\; \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1 f_n(x)dx\right].$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1 |f_n(x)|dx\right] = +\infty.$$

Ejercicio 19. Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y para $k \in \mathbb{N}$ sea $E_k = \{x \in E : |f(x)| \geq k\}$.

(a) Probar que si f integrable sobre E entonces $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k) < +\infty$.

(b) Probar que si $m(E) < +\infty$ y $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k) < +\infty$ entonces f es integrable.

Sugerencia. Recordar la relación $[|f|] \leq |f| \leq [|f|]+1$, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Ejercicio 20. Sea $g : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Probar que si existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la igualdad

$$\int_0^1 (g(x))^n\, dx = \alpha$$

entonces existe $E \subseteq [0,1]$ medible tal que $g = \chi_E$ en casi todo punto.