

## PRÁCTICA 2 - FUNCIONES MEDIBLES

**Ejercicio 1.** Sea  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Probar que

- (a) Si  $f$  es medible entonces  $f^{-1}(B)$  es medible para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . ¿Vale la recíproca?
- (b) Si  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ y } C \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$  entonces  $f$  es medible si y sólo si  $f^{-1}(E)$  es medible para todo  $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medibles. Mostrar que los conjuntos  $\{f > g\}$  y  $\{f = g\}$  son medibles.

**Ejercicio 3.**

- (a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$  es medible. ¿Es  $f$  medible?
- (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f|$  es medible. ¿Es  $f$  medible?

**Ejercicio 4.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

- (a) Probar que si  $f$  es monótona entonces  $f$  es medible Borel.
- (b) Probar que si  $f$  es derivable sobre  $\mathbb{R}$  entonces  $f'$  es medible Borel.

**Ejercicio 5.** Probar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una función medible entonces existe  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible Borel tal que  $f = g$  en casi todo punto.

**Ejercicio 6.** Probar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es continua en casi todo punto entonces es medible.

**Ejercicio 7.**

- (a) Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en casi todo punto tal que no exista  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua que verifique  $f = g$  en casi todo punto.
- (b) Hallar  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g$  sea continua,  $f$  coincida con  $g$  en casi todo punto y  $f$  sea discontinua en todo punto.

**Ejercicio 8.** Sean  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Probar que dados  $\varepsilon > 0$  y  $\delta > 0$  existe  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que

$$m(\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \delta\}) < \varepsilon.$$

*Sugerencia.* Mostrar primero que dada una función simple  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $g_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que

$$m(\{x \in I : g_\varepsilon(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon.$$

**Ejercicio 9.** Sea  $E$  un conjunto medible y  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles definidas sobre  $E$  tal que para todo  $x \in E$  existe  $M_x > 0$  tal que  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \leq M_x$ . Probar que si para cada  $\alpha > 0$  existe  $k_\alpha \in \mathbb{N}$  tal que  $m(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}) \leq \frac{\alpha}{k}$  para todo  $k \geq k_\alpha$  entonces  $E$  tiene medida nula.

**Ejercicio 10.** Sea  $E$  medible de medida finita y  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles definidas sobre  $E$  tal que para todo  $x \in E$  existe  $M_x > 0$  tal que  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \leq M_x$ . Probar que dado  $\varepsilon > 0$  existen  $F_\varepsilon \subseteq E$  cerrado y  $M_\varepsilon > 0$  tales que

$$m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sup_{x \in F_\varepsilon} \left[ \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \right] \leq M_\varepsilon.$$

**Ejercicio 11.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = n\chi_{[1/n, 2/n]}(x)$ . Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) La sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente.
- (b) Para cada  $\delta > 0$  la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sobre  $[\delta, \infty)$ .
- (c) No existe  $E \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$  de medida nula tal que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converja uniformemente sobre  $E^c$ .

**Ejercicio 12.** Sean  $E$  un conjunto medible y  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles definidas sobre  $E$  y finitas c.t.p. tales que convergen c.t.p. a una cierta  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Probar que existe una sucesión  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos medibles de  $E$  que verifica

- (i)  $m(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i) = 0$
- (ii) La sucesión  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  sobre cada  $E_i$ .

**Ejercicio 13.** Sean  $E$  un conjunto medible y  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles definidas sobre  $E$  y finitas en casi todo punto. Consideremos además una sucesión  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos medibles de  $E$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} m(E \setminus E_k) = 0.$$

Probar que si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $\chi_{E_k} f_k \xrightarrow{m} f$  entonces  $f_k \xrightarrow{m} f$ .

**Ejercicio 14.** Supongamos que  $f_k \xrightarrow{m} f$  y  $g_k \xrightarrow{m} g$  sobre  $E$ .

- (a) Probar que  $f_k + g_k \xrightarrow{m} f + g$  sobre  $E$ .
- (b) Probar que si  $E$  tiene medida finita entonces  $f_k g_k \xrightarrow{m} f g$  sobre  $E$ .
- (c) Mostrar que la hipótesis de medida finita en el ítem anterior no puede retirarse.
- (d) Probar que si  $E$  tiene medida finita y  $g$  es no nula en casi todo punto entonces  $\frac{f_k}{g_k} \xrightarrow{m} \frac{f}{g}$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $\varphi$  la función de Cantor-Lebesgue y  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  definida por

$$f(x) = \varphi(x) + x.$$

- (a) Probar que  $f$  es continua y biyectiva con inversa  $f^{-1}$  continua.
- (b) Probar que  $m(f(C)) = 1$  donde  $C$  denota al conjunto de Cantor.
- (c) Mostrar que existe un conjunto medible  $E \subseteq [0, 1]$  tal que  $f(E)$  no es medible.  
¿Contradice esto la medibilidad de  $f^{-1}$ ?
- (d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.
- (e) Hallar  $h_1$  medible Borel y  $h_2$  medible tal que  $h_2 \circ h_1$  no es medible.

**Ejercicio 16.** Probar que toda función semicontinua (inferior o superior) es medible Borel.