Práctica 1 - Medida de Lebesgue

Ejercicio 1. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ probar que existe $H \supseteq A$ de tipo G_δ tal que $m_*(A) = m(H)$.

Ejercicio 2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$. Probar que $m_*(A \cup B) = m_*(A) + m_*(B)$.

Ejercicio 3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que existe A de medida nula con $E \subseteq A$.

(a) Probar que E tiene medida nula.

(b) Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c. ¿Cual es el cardinal de los no medibles?

Ejercicio 4. Sea $E = \{x \in (0, 1) : \text{en el desarrollo decimal de } x \text{ no aparece el dígito } 7\}$. Probar que E tiene medida nula.

Ejercicio 5.

(a) Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida nula.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida nula.

(c) ¿Y si f tiene finitas discontinuidades?

Ejercicio 6. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m(Z) = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

Ejercicio 7. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $E = A \cup B$ con $m(B) = 0$. Probar que A es medible.

Ejercicio 8. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por la fórmula $T(x) = x + v$. Probar que

(a) $m_*(T(E)) = m_*(E)$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $m(T(E)) = m(E)$.

Ejercicio 9. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $rA = \{r.a : a \in A\}$. Probar que

(a) $m_*(rA) = r^n m_*(A)$.

(b) Si A es medible entonces rA es medible y $m(rA) = r^n m(A)$.

Ejercicio 10. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por I' a los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas y por $m'_*(E)$ a la medida exterior de un conjunto E relativa a dicho sistema de coordenadas.

(a) Probar que $m'_*(E) = m_*(E)$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Deducir que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es invariante por rotaciones y simetrías.

Ejercicio 11. Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

(a) Calcular $m(B(0,r))$ en términos de $m(B(0,1))$.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que la función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f(r) = m(A \cap B(0,r))$$

es continua.

(c) Demostrar que si A es medible entonces para cada $s : 0 \leq s \leq m(A)$ existe $B \subseteq A$ medible tal que $m(B) = s$.

(d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < m(A) < +\infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$ existen n subconjuntos disjuntos de A, $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$, tales que $m(A_j) = m(A)/n$, para cada $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 12. Sea $T : [0,1) \to [0,1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Probar que si $E \subseteq [0,1)$ es medible entonces $T^{-1}(E)$ es medible y $m(T^{-1}(E)) = m(E)$.

Ejercicio 13. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

(a) $\liminf_{n \to \infty} A_n$ y $\limsup_{n \to \infty} A_n$ son medibles.

(b) $m(\liminf_{n \to \infty} A_n) \leq \liminf_{n \to \infty} m(A_n)$.

(c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$ vale que $m(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) < +\infty$ entonces $m(\limsup_{n \to \infty} A_n) \geq \limsup_{n \to \infty} m(A_n)$.

(d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty$, entonces $m(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$.

Ejercicio 14. Construir un subconjunto C_δ de $[0,1]$ siguiendo la construcción del conjunto de Cantor excepto que en el k-ésimo paso cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$ para cierto $0 < \delta < 1$.

(a) Probar que C_δ es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

(b) Construir un abierto de $\mathbb{R}$ con frontera de medida positiva.

Ejercicio 15. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) E es medible.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $m_*(E \backslash F) < \varepsilon$.

(c) Existen H de clase F_σ y N de medida nula tales que $E = H \cup N$.

Ejercicio 16. Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c).$$

Probar que

(a) Todo conjunto medible satisface la condición de Carathéodory.

(b) Si E es acotado y satisface la condición de Carathéodory entonces E es medible.

(c) E es medible si y sólo si satisface la condición de Carathéodory.

Ejercicio 17.

(a) Probar que si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m_*(E_k).$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $m_*(E_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$m_*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \lim_{k\to\infty} m_*(E_k).$$

Ejercicio 18. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos su medida interior por la fórmula

$$m_i(E) = \sup\{m(F) : F \subseteq E\,,\, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

(a) $m_i(E) \leq m_*(E)$.

(b) Si E es medible entonces $m_i(E) = m_*(E)$.

(c) Si $m_*(E) < +\infty$ y $m_i(E) = m_*(E)$ entonces E es medible.

(d) Existe E no medible tal que $m_i(E) = m_*(E)$.

(e) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow m_i(E_1) \leq m_i(E_2)$.

(f) Si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son disjuntos entonces $m_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_i(E_k)$.

Ejercicio 19. Sea V un conjunto de Vitali. Probar que si $E \subseteq V$ es medible entonces $m(E) = 0$. Concluir que $m_i(V) = 0$.

Ejercicio 20.

(a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjuntos tales que $m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k)$.

(b) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $m_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) > \sum_{k=1}^{\infty} m_i(E_k)$.

(c) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m_i(E) < +\infty$ y $m_*(E) = +\infty$.

Ejercicio 21. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $A \subseteq E$. Probar que

$$|E| = m_i(A) + m_*(E \backslash A).$$

Ejercicio 22. Mostrar que existe $H \subseteq [0, 1]$ de clase F_σ con $m(H) = 1$ formado únicamente por puntos irracionales.

Ejercicio 23. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva.

(a) Mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $m(I) < \alpha m(E \cap I)$.

(b) Probar que existe $r_0 > 0$ tal que $E \cap (E + v) \neq \emptyset$ para todo $v \in B(0, r_0)$.

(c) Concluir que el conjunto de las diferencias de E definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

Ejercicio 24. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal c.
Sugerencia. Recordar que si α es un cardinal infinito entonces $\alpha^2 = \alpha$.

Ejercicio 25. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que para todo par de puntos $x, y \in E$ se satisface

$$x \neq y \Longrightarrow \frac{x + y}{2} \notin E.$$

Probar que E tiene medida nula.
Sugerencia. Mostrar que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que para todo intervalo I se tiene $m(E \cap I) \leq \alpha m(I)$.