Introducción a las Finanzas Cuantitativas Parte I

Manuel Maurette

Profesor Invitado, Instituto de Cálculo, FCEN, UBA.

Noviembre de 2017 - IC, FCEN, UBA

Hoja de ruta - Primera reunión

- Qué es un quant?
- Por qué hay matemáticos, físicos, etc en la industria financiera?
- Breve Introducción a las finanzas cuantitativas
- Derivados financieros
- Valuación de derivados
- Modelo binomial – discreto

QUANT, y eso con qué se come?

QUANT, y eso con qué se come?

Definición

En finanzas, el análisis cuantitativo es la utilización de matemáticas financieras, con frecuencia derivadas de la física y de la estadística, para llevar a cabo análisis financiero. (...) En la industria de inversión, los analistas que desarrollan análisis cuantitativo son conocidos normalmente como **quants**. - Wikipedia

Los *quants* suelen venir de la Matemática, la Física y la Ingeniería, y no de carreras relacionada con la Economía.

Donde trabaja un Quant?

En los grandes bancos de Inversión :

- HSBC, Deutsche Bank, BNP Paribas Barclays PLC,
- JPMorgan Chase, Bank of America USA, RBS,
- Citigroup Inc, Wells Fargo, UBS, Credit Suisse Group, Goldman Sachs, Morgan Stanley

Fondos de Inversión:

- Bridgewater Associates, Man Group, JPMorgan Asset Management
- Brevan Howard Asset Management, Och-Ziff Capital Management Group, Paulson & Co, BlackRock Advisors

En Organismos Estatales de Control (regulatorios)
En Companías de desarrollo (NAG, MatLab)
En Consultoras (CRISIL, KPMG, EY)

Ejemplo de Quant Finance Jobs[LINK!]

Finanzas 101

Nociones financieras 1

Definición

Llamaremos **activo**-*asset* a cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos.

Ejemplos de activos:

- La acción de YPF que cotiza en BCBA.
- Un Quintal de soja en el mercado de Rosario.
- El precio futuro de Mayo 2018 de una tonelada de trigo.
- La precio futuro Diciembre 2018 de la tasa de cambio ARS/USD.
- Un Bono de la provincia de Santa Fe

Definición

Llamaremos **Cartera**-*Portfolio* a un conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc.

Nociones Financieras II

Definición

El Mercado Monetario - **Money Market** es es el conjunto de mercados financieros,en los que se intercambian activos financieros que tienen como denominador común un plazo de amortización corto, que no suele sobrepasar los dieciocho meses, un bajo riesgo y una elevada liquidez. Ejemplo: Bono corto plazo soberano. Pedir dinero prestado *sin* costo/riesgo. Notación: $B(t)$.

Se dice que en una inversión se toma una posición **long** cuando se compra y se dice que se toma una posición **short** cuando se vende.

Ejemplo

El portfolio compuesto por 100 unidades del activo S long y 10 bonos short, lo podemos denotar:

$$\Pi = 100S - 10B$$

Valor futuro del dinero y riesgo

Teorema

1$ hoy vale más que 1$ mañana.

$$B(0) = \frac{1}{(1+r)} B(T)$$

o

$$B(0) = e^{-rT} B(T)$$

Teorema

1$ sin riesgo vale más que 1$ con riesgo.

Arbitraje

Teorema

There is no free lunch!

Definición (Arbitraje - Coloquialmente)

En economía y finanzas, arbitraje es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados: realizar una combinación de transacciones complementarias que capitalizan el desequilibrio de precios.

Para modelar y para buscar precios justos, necesitaremos la siguiente hipótesis:
No existen posibilidades de arbitraje
Estas oportunidades existen en la realidad, pero las ventanas son (deberian ser!) pequeñas.

Arbitraje - cont

Definición (Arbitraje - Formalmente)

Si V_t denota el portfolio a tiempo t, con $V_0 = 0$

$P(V_t \geq 0) = 1$ y ; $P(V_t \neq 0) > 0$ $P(V_t \geq 0) = 1$ y $P(V_t \neq 0) > 0$

Ejemplo

Supongamos que una acción se comercia en NYSE y en LSE. Supongamos que cotiza 200 USD en NY y 100 GBP en LSE cuando la tasa de cambio USD/GBP es de \$2.03 por libra. Un *arbitrador* podría simultaneamente comprar 1 unidad de la acción en NY y venderla en LSE obteniendo una ganancia neta, libre de riesgo de

$$\$2{,}03 \times 1 - \$2 = \$0{,}03 > 0$$

Derivados $\neq \frac{\partial u}{\partial x}$

Derivados

Definición

Un **derivado financiero** es un instrumento financiero que depende de otro(s) activo(s), llamado **subyacente**.

Hay grandes grupos en el mercado que usan los derivados:

+ **Replicadores** *Hedgers*: los usan para mitigar riesgo.
+ **Especuladores**: para maximizar ganancias
+ **Arbitradores**: Para buscar oportunidades
+ **Market-Makers** para inyectar liquidez

Se usan, entre otras cosas, para *transferir riesgo*.

Derivados Madre

Un **forward-futuro** es un acuerdo para comprar o vender un activo en un cierto tiempo futuro por un precio pactado.

Un **swap** es un acuerdo para intercambiar flujos de fondos futuro. Típicamente una parte se basa en un precio fijo y la otra en un precio variable.

Definición

El payoff de un derivado es su valor a tiempo final.

Algo de Historia

580 a.c. Tales de Mileto compró todas las prensas de olivo en Mileto luego de predecir el tiempo y una buena cosecha en un determinado año. En otra version, Aristóteles explica que Tales reservó prensas con descuento, para luego alquilarlas más caras cuando la demanda era mayor.

1600 d.c. En la burbuja de los Tulipanes en Holanda (1630) se compraban tulipanes a futuro. Los primeros futuros estructurados se encuentran en el mercado de Arrozde Yodoya, en Osaka, Japon (1650). London Royal Exchange.

1907 Se crea el Mercado de Cereales a Termino de Buenos Aires S.A. y en 1991 adopta su denominación actual "Mercado a Termino de Buenos Aires S.A.".

1973 d.c. Se crea la Chicago Board of Option Exchange. (mismo año que la publicación del paper seminal de Black y Scholes).

Forward

En el contrato forward, se cierra un precio K con antelación.

Ejemplo

Supongamos que dentro de 6 meses, una empresa Española tiene que pagar 1M de Libras Esterlinas a una empresa inglesa y quiere cubrirse ante posibles cambios en el EUR/GBP (hoy* en 1.25). Esta puede entrar en un contrato forward con un banco y fijar un precio conveniente para el ratio EUR/GBP. En 6 meses, la empresa entonces tiene la obligacion de comprarle a la entidad financiera, 1M de libras al precio fijado y la entidad financiera tiene la obligación de venderle. La empresa le transfirió el riesgo al banco.

El payoff es:

- $F_L(T) = S(T) - K;\ F_S(T) = K - S(T)$

El precio es:

$$F_L(0) = S(0) - Ke^{-rT}$$

Futuros

Los futuros son de naturaleza similar a los contratos forwards pero estructurados.. Aquí algunas diferencias:

- El Forward se ajusta a las condiciones y necesidades de las partes, ya que no está tan estandarizado.
- El Forward se negocia entre las dos partes que han de ser conocidas, sin cámara de compensación por medio.
- El Futuro se realiza en mercados organizados y los precios se fijan mediante cotizaciones públicas.
- El Futuro lleva generalmente aparejada la exigencia de un depósito en garantía.
- En el Forward no existe una regulación normativa concreta, cosa que sí existe para los contratos de Futuro.

Ejemplo

Mercado de Futuros Rofex[LINK!]

Swap

El swap es el derivado de tasa de interes por exelencia. Se llevan la mayor parte del mercado de derivados.

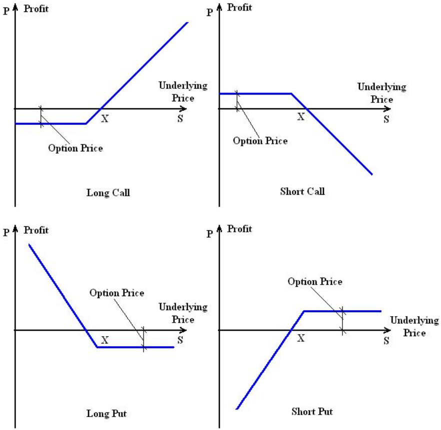
Definición

En un swap (estandard), una parte paga una tasa fija en tiempos fijados de antemano, y la otra paga una tasa flotante en fechas también fijadas de antemano. El ejemplo más estandard es en el cual una parte paga tasa fija cada 6 meses y la otra (en general una entidad financiera) paga la tasa Libor3M cada 3 meses.

Ejemplo

Para qué serviria un swap? También para tranferir riesgo. Supongamos que una empresa pide un prestamo y tiene durante 5 años cuotas trimestrales a tasa variable (Libor por ejemplo). La empresa podria fijar una tasa con un banco de inversión y recibir a cambio Libor, con lo cual se cubre de cambios en la tasa de interes.

La vedette.. La Opción Europea



Opciones

Una **opción** es un contrato que le da al dueño el *derecho*, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el *activo subyacente* por un precio determinado en un tiempo en el futuro, llamada la *fecha de expiración*. Una opción *call* da al dueño el derecho a comprar y una *put*, el derecho a vender.

Idea de estas 2-3 clases: Este derecho tiene un precio. Intentaremos ponerle un precio a este contrato.

Opciones

Veamos los payoffs de las opciones europeas:

- Opcion Call, posicion *long*: $C_L(T) = (S(T) - K)^+$
- Opcion Call, posicion *short*: $C_S(T) = (K - S(T))^-$
- Opcion Put, posicion *long*: $P_L(T) = (K - S(T))^+$
- Opcion Put, posicion *short*: $P_S(T) = (S(T) - K)^-$

Desde ya, las posiciones *short* y *long* son opuestas:

$$F_L(T) + F_S(T) = C_L(T) + C_S(T) = P_L(T) + P_S(T) = 0$$

Alguna prueba usando NO arbitraje

Recordar que la nocion de NO arbitraje implica que si dos portfolios tienen un mismo payoff a tiempo T entonces tienen que ser iguales tambine en tiempos anteriores.

Comentario (Paridad PUT-CALL)

$$C - P = F = S - Ke^{-rT}$$

PRUEBA - pizzarrón

Para qué se usan?

Es claro de la definición que el comprador de opciones obtiene un riesgo limitado, ya que goza de un derecho y no una obligación. En cambio, el vendedor o emisor de la opción asume un compromiso que debe honrar si el poseedor de la opción lo requiere, y por lo tanto su riesgo es mucho mayor.

- Cobertura contra potenciales movimientos de precios
- Beneficio ante un movimiento del subyacente
- Apalancamiento y replicación de posiciones a través de productos sintéticos
- Múltiples estrategias combinando diversas opciones

Exóticas y no tanto...

- Americana (libre ejercicio)
- Bermuda (ejercicio en determinados tiempos)
- Asiática (promedios)
- Barreras
- Digitales/Binarias

Y cada *Desk* - *Mesa*[Donde trabajan los traders] tiene sus particularidades:
FX - Commodities - Equities - IR - Credit

A valuar! Modelo Binomial

Valuación de Opciones - Método Binomial

Ejemplo

Sea el activo ABC, valuada hoy en 60\$, supongamos un mundo en el que el activo en 6 meses, solo puede tomar dos precios, 66\$ o 54\$ (subir o bajar 10 %). Supongamos que se puede pedir prestado/prestar dinero a una tasa del 6 % anual (tasa libre de riesgo). Queremos ponerle precio a la opción $cABC62$. La opcion CALL, con strike de 62\$, que vence en 6 meses.

$$\begin{tikzcd} & ABC_u = 66 \\ ABC = 60 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "6m"] & \\ & ABC_d = 54 \end{tikzcd}$$

Arbol Binomial de un paso

$$cABC62_u = \text{máx}(66 - 62, 0) = 4$$

$$cABC62 = ?? \qquad 6m$$

$$cABC62_d = \text{máx}(54 - 62, 0) = 0$$

Comentario

Se puede probar que la ausencia de arbitraje equivale a:

$$S_d < S(1 + r) < S_u$$

En este ejemplo:

$$S_d = 54 < 60(1 + 0{,}06) = 61{,}8 < S_u = 66$$

Estrategia de replicación

Contamos con los siguientes productos a disposición:

- activo S
- opción C
- dinero (un bono libre de riesgo) B. **Money market**

La idea es replicar con S y C a B.
Es decir, armarse un portfolio libre de riesgo. Sea:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \textit{ short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \textit{ long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

Comentario

Para que el porfolio sea libre de riesgo, necesitamos:

$$\Pi_d = \Pi_u$$

Cuentas

1. Hallar Δ tal que $\Pi_u = \Pi_d$ (libre de riesgo).

$$\Delta = \frac{4-0}{66-54} = \frac{1}{3}$$

2. Ahora $\Pi = \frac{1}{3}S - C \Rightarrow \Pi(6m) = 18$. Pero es libre de riesgo:

$$\Pi(0) = \frac{1}{(1+\frac{0,06}{2})}\Pi(6m) = \frac{1}{(1+\frac{0,06}{2})}18$$

   Con lo cual, $\Pi(0) = 17,47$

3. Despejo el valor del call $C(0) = 2,52$

Algunas Conclusiones

Diferencias entre invertir en S y en C: Supongamos que disponemos de 6000\$ para invertir.
Podía haber comprado:

- 100 acciones de ABC - precio 60.
- 2376 opciones de $cABC62$ - precio 2.52.

Analicemos los dos posibles escenarios:

1. Si la acción subía a 66\$:
   - $ABC = 66\$ \Rightarrow$ 600\$ de ganancia (10 %)
   - $cABC62 = 4\$ \Rightarrow (4 - 2{,}52)x2376 = 3506{,}33\$$ de ganancia (58 %)
2. Si la acción bajaba a 54\$:
   - $ABC = 66\$ \Rightarrow$ 600\$ de pérdida (10 %)
   - $cABC62 = 0\$ \Rightarrow$ 6000\$ de pérdida (100 %)

Caso General

Tenemos:

- S el precio de un activo
- C el precio de una opción call europea sobre este
- K el strike
- T el tiempo de expiración
- r la tasa de interes libre de riesgo
- S puede subir a S_u o bajar a S_d en T
- C_u y C_d representan los valores del call respectivamente

$$
\begin{tikzcd}
 & (S_u, C_u) \\
(S, C) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (S_d, C_d)
\end{tikzcd}
$$

Armamos el portfolio

Armemos el portfolio Π con una opción short y Δ unidades del activo long:

$$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ acciones long} \\ 1 \text{ opción short} \end{cases}$$

Como se vio en el ejemplo, $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$. El valor esperado:

$$\Pi_d(T) = \Pi_u(T) = \mathbb{E}(\Pi(T)) = \Pi(1+r) \Rightarrow \Pi(0) = \frac{1}{(1+r)}\Pi_u$$

entonces:

$$\Delta S - C = \frac{1}{(1+r)}(\Delta S_u - C_u)$$

Despejando...

Despejando C, nos queda:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u\right)$$

Con lo cual $\mathbb{E}(C(T)) = (1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u$. Remplazando Δ:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S_u + C_u\right)$$

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u\frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} + C_d\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d}\right)$$

Promedio descontado

Se puede escribir entonces al valor del Call como:

$$C = \frac{1}{(1+r)} \left(C_u q + C_d (1-q) \right) \text{ con } q = \frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d}$$

Una combinación convexa de C_u y C_d multiplicada por el factor de descuento. Resulta que q es una probabilidad, no la probabilidad de que el activo suba, sino la de *riesgo neutral*, a partir de la hipótesis de no arbitraje y la completitud del mercado.

El valor inicial de la opción puede escribirse como:

$$C(0) = \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C(T)]$$

Esta idea es CENTRAL en la teoría y dara lugar al llamado Teorema Fundamental de la Valuación de Activos

Árbol Binomial General

La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no sólo una vez, sino un número finito m de veces en el intervalo $[0, T]$ cada δt con $T = m\delta t$. Este modelo es:

- **Simple** como para trabajar explícitamente
- **Ayuda** para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas más realistas.

1. Se construye un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este.
2. Se analizar los posibles precios a tiempo T y determinar la probabilidad de riesgo neutral.
3. Yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo.

Notación

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos.
Notación:

$$S_n^j = S_{\underbrace{uu\ldots u}_{j}\underbrace{dd\ldots d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$$

Tomaremos como factor de descuento e^{-rt}, es decir un interes continuo.

El árbol resulta entonces:

El Árbol

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \\
 & & \mathfrak{u}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{u}S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{u}\mathfrak{d}S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{d}S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & & \mathfrak{d}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & {}
\end{tikzcd}
$$

La probabilidad de riesgo neutral

Haciendo un análisis similar al anterior, resulta que:

$$q = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}$$

Notar que q no depende de S, es decir, no depende del precio del activo sino que es intrínseco al activo, lo que es más cercano a la realidad.

Comentario

La condición de no arbitraje para este modelo resulta:

$$0 < \mathfrak{d} < 1 + r < \mathfrak{u}$$

Qué es esto de Risk Neutral?

Este concepto de *probabilidad* de que el activo suba es uno de los conceptos básicos en toería de valiación:

- NO solo con opciones! Cualquier derivado
- Es INDEPENDIENTE al modelo usado.

Comentario

El mundo *Riesgo-Neutral* es un mundo en el cual los inversores no tienen ni Aversión al Riesgo, ni tampoco lo buscan.

Teorema (Teorema Fundamental de la Valuacion de Activos)

El precio de cualquier derivado se puede obtener descontando la esperanza del payoff, bajo la probabilidad de riesgo neutral.

$$V(0) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V(T)\right]$$

Fórmula recursiva a partir del Árbol

Como vimos en el ejemplo, surge la siguiente fórmula recursiva:

$$\begin{cases} C_n^j = e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), & 0 \leq n \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq n \\ C_m^j = (S_m^j - K)^+, \quad 0 \leq j \leq m & \end{cases}$$

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, hasta llegar al $C_0^0 = C$.

Comentario

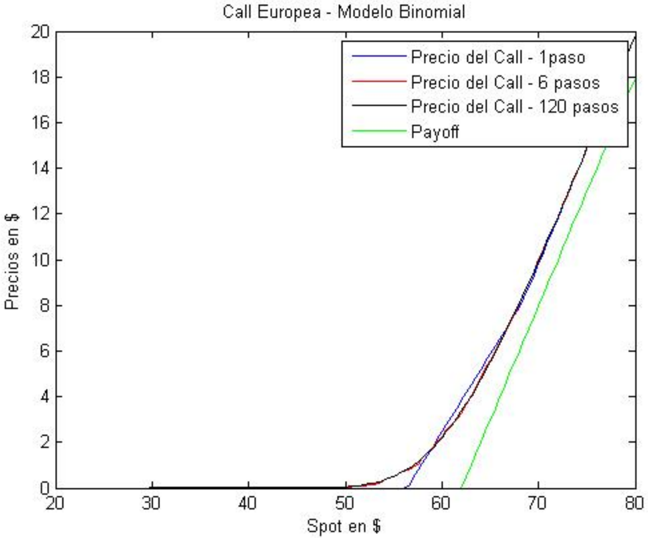
Este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

También es útil en el caso de opciones barrera.

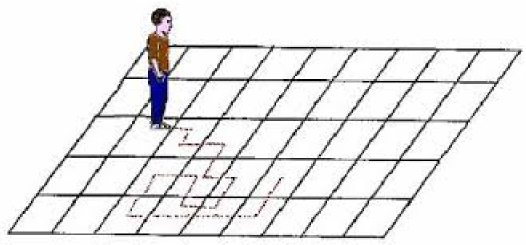
Vamos a la máquina ![LINK!]

Modelo Binomial - Matlab

Si todo salió bien, pudieron ver la cocina...
Si no, aquí el plato terminado:



El paseo al azar...



El paso al límite

Qué resulta de un árbol binomial en el límite?..

Paseo al azar - random walk

En física/matemática:

- Movimiento aleatorio de moléculas de líquidos y gases
- Teoría Cuántica de campos
- Dinámica de poblaciones
- Procesamiento de imágenes

Además de ser un primo del:

Movimiento Browniano - proceso de Wiener
[Lo estudiaremos la próxima]

Preguntas, Comentarios,...

Gracias, hasta la próxima!

Algunas Referencias

- Avellaneda M. (2000) Quantitative modeling of derivative securities, Chapman & Hall/CRC.
- Black F. & Scholes M. (1973) The pricingof options and corporate liabilities, J. Political Econ. 81, pp. 637-659
- Hull J. C. (1997) Options, Futures, and other Derivatives, Prentice - Hall, Inc.
- Wilmott P. Dewynne J. & Howison S. (1993) Option Pricing, Oxford Financial Press, Oxford.
- Maurette, M Notas del curso Análisis Cuantitativo en Finanzas - 2do cuatri, 2016 - DM, FCEN, UBA