

ANÁLISIS COMPLEJO- - SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2016

Práctica N°5. Funciones Analíticas - Más sobre Integrales

Funciones Analíticas

1. i) Consideramos la *función de Cauchy* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Probar que es C^∞ . ¿Puede expresarse en algún entorno de $x = 0$ mediante una serie de potencias?

- ii) Si definimos ahora otra función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la variable compleja z cambiando x por z en la fórmula de i) ¿se obtiene una función holomorfa en $z = 0$?
2. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n .
3. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 5$.
4. Sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ armónica no suryectiva.
- (a) Probar que u está acotada superior o inferiormente.
- (b) Probar que u es constante (por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva).
5. Sea f entera tal que existen dos números complejos, z_0 y z_1 , \mathbb{R} -linealmente independientes, tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.
6. (a) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.
- (b) Con las hipótesis del ítem anterior, verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω , f tiene sólo un número finito de ceros.
7. (a) ¿Existe f holomorfa en $B(0, 1)$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
- (b) ¿Existe f holomorfa en $B(0, 1)$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3-2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$?
8. Hallar todas las funciones enteras tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo simétrico con respecto a \mathbb{R} tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ vale que $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

10. Sea $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $B(0, 1)$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $B(0, 1)$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?
11. Sean Ω un abierto conexo del plano complejo y $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω . Si existe una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ de puntos de Ω tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \Omega$, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω .

12. Demostrar que si Ω es un abierto conexo del plano complejo, f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω , entonces $g \equiv 0$ o f es constante.
13. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos P_1, P_2, \dots, P_n en el plano \mathbb{R}^2 . Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\overline{\Omega}$ a los puntos P_1, \dots, P_n alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω .
14. Sea f entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en \mathbb{C} . Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en \mathbb{C} .
15. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f(z)| = \text{cte}$ para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.
16. Formular y demostrar el “principio de módulo mínimo” para funciones holomorfas.
17. Sea $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos a y b tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0, 1)$. (Sugerencia: considerar la función

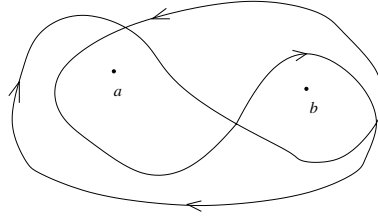
$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con } h(z) = f\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

y usar el Lema de Schwarz.)

18. Sean $f, g : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B(0, 1)$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en $B(0, 1)$.
19. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0, 1) \rightarrow B(1, 4)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.
20. Sea $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo z en $B(0, 1)$.
21. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 2)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.

Más sobre Integrales- Dominios simplemente conexos

22. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



- i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.
 - ii) Convencerse de que γ no es homotópica a cero en Ω .
23. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω . ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?
24. (a) Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g}f$ es constante.)
- (b) Demostrar que tal g es única.
- (c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \implies g(z_1) = g(z_2)$.
- (d) ¿Es necesaria la hipótesis de “simplemente conexo” en el ítem (a)?
25. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \sin(h(z))$. (Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$, luego $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.)