Análisis Complejo - - Segundo Cuatrimestre de 2016

Práctica N°2. Funciones Holomorfas - Logaritmos y Raices n-ésimas

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a + ib \iff \Big(\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z\to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = b \Big).$$

2. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$, tales que f es derivable en $z_0 = a + ib$.
   (a) Probar que g es diferenciable en (a,b).
   (b) Calcular
   $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \text{ y } \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih}$$
   en términos de u y v. ¿Qué se deduce?
   (c) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a,b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:
$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } x+iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$
Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$ y hallar $f'(z)$:
   (a) $f(z) = y + ix$,
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,
   (d) $f(z) = x^2 + iy^2$,
   (e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,
   (f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$,
   (g) $f(z) = z^3 - 2z$,
   (h) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$,
   (i) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$,
   (j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$

5. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{C}^2$ es *armónica* si verifica $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. A su vez, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa.
   (a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son $\mathcal{C}^2$, entonces son armónicas. Deducir que si u es una función $\mathcal{C}^2$ que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.
   (b) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.
   (c) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

i. $u_1(x,y) = x^2 - y^2$, ii. $u_2(x,y) = x^2y^2$, iii. $u_3(x,y) = 2x(1-y)$.

(d) Probar que si v es conjugada armónica de u, las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (es decir, un subconjunto de $\mathbb{C}$ abierto, conexo y no vacío).

   (a) Probar que para todos z_0 y z_1 en Ω existe una curva γ, $\mathcal{C}^1$ a trozos, tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

   (b) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω, probar que f es constante.

7. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar:

   (a) $\mathrm{Re}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
   (b) $\mathrm{Im}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
   (c) $|f|$ cte $\Rightarrow f$ cte,
   (d) $\arg(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
   (e) $\overline{f}$ holomorfa $\Rightarrow f$ cte.

8. Sean $L_1, \dots, L_n \subseteq \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{C}$) n rectas distintas. Probar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ entonces g es constante.

9. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

10. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$f(x+iy) = e^x f(iy).$$
(Sugerencia: definiendo $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(iy) = c(y) + is(y)$, probar que $c' = -s$ y que $s' = c$.)

11. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$f(x+iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi.$$

12. **Regla de L'Hospital.** Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

13. Calcular:

   (a) $\lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$,
   (b) $\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$
   (c) $\lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$,
   (d) $\lim_{z \to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

14. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva $\mathcal{C}^1$. Sea $v = \gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea $z = f'(\gamma(t_0))$. Mostrar que zv es el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.

15. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1+i)t$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$. Calcular en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.

Función logaritmo y raíces n-ésimas

16. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.
    (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.
    (b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω. Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.
    (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.

17. Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.
    (a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.
    (b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^{π} al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
    (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \to \mathbb{C},\ h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.
    (d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

18. Sea log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,
$$\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-t}{i+t}\right).$$

19. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n-ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.
    (a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Definirlas.
    (b) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.
    (c) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.
    (a) Demostrar que para toda rama g, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω.
    (b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3} g(z)$ para todo z en Ω.
    (c) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el item (b).