

Práctica 2: Funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

1. Describir y graficar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$ b) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$ d) $f(x, y) = \frac{1}{x}$

e) $f(x, y) = \frac{\ln(1 - y + x^2)}{\sin x}$ f) $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1 + t^2} dt$

g) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$ h) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

2. Para distintos valores de c graficar aproximadamente el conjunto $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$. En otras palabras, determinar las distintas curvas de nivel.

a) $f(x, y) = x + y$ b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ d) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

e) $f(x, y) = x^2 - y^2$

3. Estudiar las superficies de \mathbb{R}^3 representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

a) $z = 2x^2 + y^2$ b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$ c) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$

d) $3x + 2y - z = 0$ e) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$ f) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

g) $x^2 + y^2 = 4z^2$

4. Para distintos valores de u graficar aproximadamente el conjunto $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = u\}$. En otras palabras, determinar las distintas superficies de nivel.

a) $f(x, y, z) = x + y + z$ b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

Límite y continuidad

5. ¿A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

$$a) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)? \quad b) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right)? \quad c) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000}\right)?$$

6. Se define $[x]$ la parte entera de x como $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Analizar la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ siendo:

$$a) f(x) = x - [x]. \quad b) f(x) = \frac{x}{[x]}. \quad c) f(x) = |x| + [x].$$

7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x} & b) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} x \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)} & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/\tan x} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & i) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} \end{array}$$

8. (a) Usando sólo la definición de límite demostrar que:

$$\text{i. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1;$$

$$\text{ii. } \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} xy = -8.$$

(b) Si $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$ ó $\varepsilon = \alpha^2$, encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \implies |xy + 8| < \varepsilon.$$

9. Probar por definición que si $(x, y) \rightarrow (2, 3)$, entonces $y \operatorname{sen}(xy - 6) \rightarrow 0$.

10. Probar que:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39;$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \operatorname{sen}(x \cos y) = 0;$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xe^{xy} = 0;$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}.$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} ye^x = 1;$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0 \text{ si } c \neq 0;$$

11. (a) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f no se anula sobre $B_r(a, b) \setminus \{(a, b)\}$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\text{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1.$$

- (b) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$. Probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln(f(x, y))}{f(x, y)} = 0.$$

12. Calcular:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2};$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen}(xy)}{x};$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2).$

13. Analizar la existencia de los límites restringidos a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

a) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y};$

b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2};$

c) $f(x, y) = \frac{\text{sen } x}{y};$

d) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

e) $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{xy + y - x};$

f) $f(x, y) = |x|^y;$

g) $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2};$

h) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2};$

i) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x^2 + 1}{x^2 - y^2};$

j) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$

k) $f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|};$

l) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$

m) $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$

n) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

o) $f(x, y) = x \text{sen} \frac{\pi}{y} + y \text{sen} \frac{\pi}{x};$

p) $f(x, y) = \text{sen} \frac{x}{y};$

14. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$a) f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}; \quad b) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x};$$

$$c) f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \quad d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y)y}{x^4}, & \text{si } 0 < y < x^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

15. Para cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \frac{1}{2} \sin^2(x);$$

$$(b) f(x) = x^2 - [x^2];$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ -x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2), & \text{si } |x| \leq 1; \\ |x - 1|, & \text{si } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x > 0; \\ x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

- Calcular su dominio natural.
- Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.
- En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2|y|^3} & (x, y) \neq (-1, 0) \\ 1 & (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

- (a) Probar que f no es continua en $(-1, 0)$.
- (b) Redefinirla en $(x, y) = (-1, 0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en \mathbb{R}^2 .

17. Consideremos la función

$$f(x, y) = xy \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{y} \right).$$

- (a) Calcular su dominio.
 (b) Determinar si es posible extenderla a \mathbb{R}^2 de modo que resulte continua.

18. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 0);$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 2);$$

$$(c) f(x, y) = \text{sen}(x \cos y) \quad \text{en } (1, 1) \text{ y } (0, 2);$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 1);$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (-1, 2).$$

19. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{|x - y|}$$

Sugerencia: En primer lugar calcular el dominio de f y mostrar que cero es un candidato a límite. Luego elegir uno de los siguientes caminos para probar la no existencia del límite:

- PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual f no tienda a cero.
- PLAN B: Considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n)$.
- PLAN C: Probar si el límite es cero entonces debe existir un entorno del origen en donde f esté acotada. Mostrar que esto último no puede ocurrir.

20. Analizar la existencia de límite en el origen para

$$f(x, y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}$$

21. Estudiar la continuidad de f en el punto $(1, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

Sugerencia: Probar y usar que si $\|(x, y) - (1, 0)\| < \frac{1}{2}$ entonces $(x - 1)^2 + y^2 |x| \geq \frac{1}{2}[(x - 1)^2 + y^2]$

22. Estudiar la continuidad de f en el origen de coordenadas.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - \tan(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

23. Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

24. Demostrar que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a, y) . Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo \mathbb{R}^2 :

$$(a) \quad f(x, y) = \text{sen}(x). \quad (b) \quad f(x, y) = \text{sen}(x^2) + e^y.$$

25. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a) \quad f(x, y) = (x^2, e^x) \quad (b) \quad f(x, y) = \left(\frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right)$$

26. (a) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.
 (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Im}(f) = [a, b] \cup [c, d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?
 (c) Demostrar que la ecuación $x^{2^x} = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.
 (d) Probar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.
 (e) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.
27. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.
 (b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

28. Sea $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2y)}{\ln(1 - x^2)}$

- (a) Encontrar el dominio D de f y graficarlo.
 (b) Dado $q = (q_1, q_2) \in \partial D$, ¿existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (q_1, q_2)} f(x, y)$?