Álgebra III

Práctica 8 - Segundo cuatrimestre de 2016

Extensiones trascendentes. Un poco de álgebra conmutativa

Nota: En esta práctica los anillos son conmutativos y tienen unidad.

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo y sean α algebraico sobre K y t trascendente sobre K. Probar que α es algebraico sobre $K(t)$ y que $m(\alpha, K) = m(\alpha, K(t))$.

Ejercicio 2. Sean L_1 y L_2 dos subextensiones de una extensión E/K. Probar que

$$trdeg(L_1L_2/K) \leq trdeg(L_1/K) + trdeg(L_2/K).$$

Ejercicio 3. Sea E/K una extensión, con E algebraicamente cerrado. Sea $\phi : E/K \to E/K$ un morfismo de extensiones. Probar que si $trdeg(E/K) < \infty$, entonces ϕ es un isomorfismo. Probar que esto no es necesariamente cierto si $trdeg(E/K) = \infty$.

Ejercicio 4. Sea t trascendente sobre $\mathbb{C}$. Sea K una clausura algebraica de $\mathbb{C}(t)$. Probar que $K \cong \mathbb{C}$.

Ejercicio 5. Sea R un anillo. Probar que son equivalentes:
(a) El conjunto de elementos no inversibles forma un ideal.
(b) R es un anillo local, es decir, tiene un único ideal maximal.

Ejercicio 6. Probar que un anillo local no tiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1.

Ejercicio 7. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local y sea M un R-módulo finitamente generado. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in M$ tales que $\bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, \bar{x_k}$ generan $M/\mathfrak{m}M$ como $R/\mathfrak{m}$-espacio vectorial. Probar que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ generan a M como R-módulo.

Ejercicio 8. Sea R un anillo, y sean I, J ideales. Probar que

- $I \subseteq \sqrt{I}$.
- Si $I \subseteq J$, entonces $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.
- $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
- $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- Si I es primo entonces $I = \sqrt{I}$.

Ejercicio 9. Sea R un DFU. Sea $f \in R$ y sea $I = (f)$. Supongamos que $f = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ con los q_i irreducibles distintos. Probar que $\sqrt{I} = f_{red} := q_1 \cdots q_r$.

Ejercicio 10. Probar que los subconjuntos algebraicos propios de $\mathbb{A}^1(k)$ son los conjuntos finitos.

Ejercicio 11. Sea $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ una curva, y sea $L = V(y - ax - b) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ una recta con $L \not\subseteq V$. Si f es un polinomio de grado n, probar que $L \cap V$ tiene a lo sumo n puntos.

Ejercicio 12. Hallar las componentes irreducibles de los siguientes conjuntos algebraicos

- $V(y^2 - x(x^2 - 1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.
- $V(y^2 - xy - x^2y + x^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

- $V(y^2 + x^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$.

Ejercicio 13. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ un conjunto algebraico. Probar que hay una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos algebraicos de V y los ideales radicales de $\mathcal{O}(V)$.

Ejercicio 14. Probar que los siguientes anillos son dominio, y ádemas, que:

- $\mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$ es integralmente cerrado.
- $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$ no es integralmente cerrado.

Ejercicio 15. Sean $R \subseteq S$ dominios. Supongamos que $h \in R[X]$ se factoriza en $S[X]$ como producto de dos polinomios mónicos, $h = fg$. Probar que los coeficientes de f y de g son enteros sobre R. (*Sugerencia*: Cualquier raíz de f en una extensión de R es entera sobre R.) Deducir que si R es integralmente cerrado en S, entonces $f, g \in R[X]$.

Ejercicio 16. Sean $R \subseteq S$ dominios y sea $U \subseteq R$ un conjunto multiplicativo. Sea $\tilde{R}$ la clausura entera de R en S. Probar que $U^{-1}\tilde{R}$ es la clausura entera de $U^{-1}R$ en $U^{-1}S$.

Ejercicio 17. Para $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ y $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x - 1))$ probar que R es un dominio y que si K es el cuerpo de cocientes de R entonces el elemento $t := \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \in K$ es tal que $K = \mathbb{C}(t)$ y $\mathbb{C}[t]$ es la clausura entera de R en K.