Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2016

Práctica N° 3: Diferencias Finitas (Ecuaciones Hiperbólicas)

Ejercicio 1 Para resolver la ecuación de convección-difusión

$$U_t = aU_x + \mu U_{xx} \qquad \mu > 0,\ a \in \mathbb{R}$$

se quiere aproximar la solución con un esquema explícito y centrado de segundo orden en x:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

(a) De condiciones sobre $\Delta t, \Delta x$ que aseguren la estabilidad en $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Analice los resultados casos límite $a = 0$ (problema sin convección) y $\mu = 0$ (problema sin difusión). ¿Qué ocurre?

Ecuación de transporte lineal

Ejercicio 2 Sea a una constante positiva.

(i) Resuelva la ecuación $U_t + aU_x = 0$, en toda la recta, con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

(ii) Proceda análogamente con $U_t - aU_x = 0$.

(iii) Reemplace $e^{i(kx+\omega t)}$ en ambas ecuaciones y halle ω en cada caso. Concluya que ningún modo es amortiguado y que en un lapso Δt su fase cambia en $-ak\Delta t$.

Ejercicio 3 (**Up-Wind**) Para aproximar la ecuación $U_t + aU_x = 0$ se consideran los métodos:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^q - u_{j-1}^q}{\Delta x} = 0$$

con $q = n$ (explícito) y $q = n + 1$ (implícito).

(a) Analice qué restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.

(b) Estudie la estabilidad con el método de Fourier. ¿El resultado depende del signo de a?

(c) Implemente ambos métodos para el problema con condición de borde $U(0, t) = 0$ y condiciones iniciales $U(x, 0) = U_0$, para $U_0 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x)$ y para $U_0 = e^{-10(4x-1)^2}$. Grafique la solución numérica vs. la exacta, para distintos valores de ν menores o mayores que 1.

(d) ¿Para qué valores de ν la matriz de iteraciones M correspondiente al problema **con borde Dirichlet** verifica $\rho(M) \leq 1$? ¿Esta condición garantiza la estabilidad?

Ejercicio 4 (Difusión artificial) Verifique que el esquema explícito con up-wind para la ecuación $U_t + U_x = 0$ puede escribirse como:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Observe que esta expresión coincide con la de un esquema centrado en x para la ecuación

$$U_t + U_x = \frac{\Delta x}{2} U_{xx}.$$

Concluya que el método up-wind puede interpretarse como un esquema centrado en x para la ecuación de transporte al cual se le agrega "difusión artificial". Compare el orden del esquema up-wind con la de este último. ¿Encuentra alguna contradicción?

Ejercicio 5 (**Lax-Friedrichs**) Para resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, consideramos el siguiente método explícito:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0$$

(a) ¿Cómo es el error de truncado?

(b) Analice qué restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.

(c) Estudie la estabilidad mediante el método de Fourier ¿El resultado depende del signo de a?

Sugerencia: Utilizando $\frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) = u^n + \frac{1}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$ escriba el método en términos de un esquema de diferencias centradas para un problema con *difusión artificial* y reutilice resultados conocidos.

Ejercicio 6 (**Lax-Wendroff**) Para resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, consideramos el siguiente método explícito:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta t}{2} a^2 \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right)$$

Observe que el método propuesto contiene un término de "difusión artificial".

(a) ¿De qué orden es el error de truncado en este caso? Suponga $\Delta t \sim O(\Delta x)$.

(b) Estudie la estabilidad mediante el método de Fourier ¿El resultado depende del signo de a?

Ejercicio 7 (Leapfrog) Dada la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con $a \in \mathbb{R}$ y $U(x, 0) = U_0(x)$ se propone el método de 2 pasos dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

(a) Analice que restricción debe imponerse para que se satisfaga la condicióon CFL.

(b) ¿Cómo aproximaría el valor de la solución a tiempo Δt? ¿Qué condición de borde impondría para resolver el problema numéricamente?

(c) Considere $a > 0$ y demuestre que si $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a}$ el método resulta estable.

Ejercicio 8 Para la ecuación $U_t + aU_x = 0$ se propone un esquema con diferencias a izquierda, de la forma

$$u_j^{n+1} = d_{-2}u_{j-2}^n + d_{-1}u_{j-1}^n + d_0 u_j^n$$

Halle condiciones que aseguren la validez de la condición CFL. Determine los coeficientes d_{-2}, d_{-1} y d_0, para que el método tenga un error de truncamiento del mayor orden posible.

Ejercicio 9 Muestre que si $q(x) \approx c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$ para $x \approx 0$ entonces, para $x \approx 0$

$$\operatorname{arctg}(q(x)) = c_1 x + c_2 x^2 + (c_3 - \frac{1}{3}c_1^3)x^3 \ldots$$

Ejercicio 10 (Error de Amplitud y Fase) Estudie los errores del factor de amortiguamiento $\lambda(k)$ y de fase para el k-ésimo modo que se cometen al resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con los métodos de los ejercicios 3, 5, 6 y 7.

Leyes de Conservación

Ejercicio 11 Se considera la Ley de Conservación

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} U dx = f(U(t, x_1)) - f(U(t, x_2)) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{1}$$

Pruebe que una función U suave que satisface (1) también verifica

$$U_t + f(U)_x = 0 \qquad x \in [a, b]. \tag{2}$$

Pruebe que la siguiente discretización

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

satisface una relación análoga a (1) con $x_1 = a, x_2 = b$, y analice qué ocurre con la discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f'(u_i^n)\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

¿Qué error de truncado poseen estos métodos?

Ejercicio 12 Considerar la siguiente *ecuación de Burgers inviscida* (caso particular de (2) para $f(u) = \frac{u^2}{2}$):

$$U_t + UU_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con dato inicial

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

(a) Verifique que la solución queda definida implícitamente por $U = U_0(x - Ut)$.

(b) Las curvas características son de la forma $(x(t), t)$ con $x(t) = x_0 + tU_0(x_0)$.

(c) Demuestre que
$$U_x = \frac{U_0'(x - Ut)}{1 + tU_0'(x - Ut)}$$
y por ende si para algún x_0 es $U_0'(x_0) < 0$ entonces existe un tiempo crítico t_c en el cual deja de existir U_x. Haga la misma cuenta para U_t.

Ejercicio 13 Considere la *ecuación de Burgers inviscida*

$$\begin{aligned} U_t + \frac{1}{2}(U^2)_x &= 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad &\text{(forma conservativa)} \\ U_t + UU_x &= 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad &\text{(forma semi-lineal)} \end{aligned}$$

Implemente las siguientes discretizaciones

$$\begin{aligned} &\text{Up-Wind Conservativo:} \qquad &\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{2}\frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{\Delta x} \\ &\text{Up-Wind No-Conservativo:} \qquad &\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -u_i^n\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) \end{aligned}$$

para $x \in [0, 10]$ y un tiempo final T_f, con los datos iniciales

(a) $U_0(x) = \chi_{(-\infty,\frac{1}{2})}(x) + 0.2, \quad T_f = 15$

(b) $U_0(x) = \chi_{(-\infty,\frac{1}{2})}(x), \quad T_f = 15$

(c) $U_0(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}, \quad T_f = 30$

(d) $U_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad T_f = 30$

y distintos valores de Δt y Δx tendiendo a cero de modo que $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.

¿Ambos métodos son convergentes? ¿Convergen al mismo resultado en todos los casos?

Ejercicio 14 Se considera la ecuación $U_t + f(U)_x = 0$. Verifique que para una solución U y f suficientemente regulares se tiene
$$U_{tt} = \big(f'(U)f(U)_x\big)_x .$$
De la expansión de Taylor
$$\frac{U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)}{\Delta t} \sim U_t(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}U_{tt}(x_j, t_n) + \ldots$$
reemplazando derivadas temporales por espaciales adecuadamente, y tomando diferencias centradas en el espacio, deduzca el método de Lax-Wendroff para la ley de conservación (2)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f'(u_{j+1/2}^n)\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{\Delta x} - f'(u_{j-1/2}^n)\frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{\Delta x}\right]$$

donde $u_{j\pm1/2}^n \sim \dfrac{u_j^n + u_{j\pm1}^n}{2}$. Observe que si $f' = cte$ se obtiene el método correspondiente del ejercicio 6.

Ecuación de Ondas

Ejercicio 15 Para la ecuación de ondas

$$U_{tt} = U_{xx} \qquad x \in (0,1), \qquad t > 0$$

considere el método explícito que se obtiene al tomar diferencias centradas en x y en t

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

donde ahora tomamos $r = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$

(a) Estudie consistencia y estabilidad del método propuesto.

(b) Implemente el método, para las condiciones de contorno $U(0,t) = U(1,t) = 0$ e iniciales

$$U(x,0) = \frac{1}{8}\sin(\pi x), \quad U_t(x,0) = 0$$

y compare la solución numérica contra la solución exacta, para distintos valores de Δt,Δx.

Ejercicio 16 Estudie la consistencia y estabilidad del siguiente método para $U_{tt} = U_{xx}$:

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{1}{2}r\{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})\}.$$

Ejercicio 17 Definiendo $P = U_x$ y $Q = U_t$, verifique que la ecuación de ondas $U_{tt} = U_{xx}$ puede escribirse como el siguiente sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

$$\begin{cases} Q_t = P_x \\ P_t = Q_x \end{cases}$$

Discretice cada una de las ecuaciones según Lax-Friedrichs. Pruebe que la discretización para el sistema de ecuaciones es estable para $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Peter Lax
Budapest 1926 -