Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2016

Práctica N° 2: Diferencias Finitas (Ecuaciones Parabólicas)

Ejercicio 1 Para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$ se utiliza el esquema en diferencias finitas que se obtiene al realizar una discretización explícita en la variable temporal y diferencias centradas para la segunda derivada espacial:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \quad \text{donde } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k/h^2$$

Suponiendo que U tiene derivadas continuas y acotadas hasta el tercer orden en t, y hasta de orden seis en x, probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = re_{j-1}^n + (1-2r)e_j^n + re_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde T es el error de truncado:

$$T(x_j, t_n) = \frac{h^2}{12}\left(6rU_{tt} - U_{xxxx}\right)_{j,n} + \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x_j, t_n + \theta_n k) - \frac{h^4}{360}U_{xxxxxx}(x_j + \theta_j h, t_n)$$

con $-1 < \theta_j < 1$, $0 < \theta_n < 1$.

(a) Pruebe que para $r > 0$ el error de truncado es $O(h^2)$, y que en el caso $r = 1/6$ es $O(h^4)$.

(b) Probar que si $0 < r \leq 1/2$ entonces el error global E_n dado por

$$E_n = \max_{0 \leq j \leq N}\{|e_j^n|\},$$

satisface la siguiente estimación en función del tiempo:

$$E_n \leq tM,$$

donde M es el valor máximo de $|T|$. En particular, observe que si además $t \leq T_f$ y U_{tt} y U_{xxxx} estan acotadas luego

$$E_n \leq CT_f k \tag{1}$$

para una constante C independiente de h y k.

Ejercicio 2 Escribir un programa en Matlab para integrar con el método explícito del Ej. 1, la ecuación del calor $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ en el intervalo $[0,1]$ para un dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ arbitrario y con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogeneas.

(a) Resolver el caso $f(x,t) \equiv 0$, $u_0(x) = x\chi_{[0,1/2]} + (1-x)\chi_{[1/2,1]}$.

Para ello, considere $h = 0.05$, $k = 0.0012$, y $k = 0.0013$. Avance por lo menos 50 pasos. ¿Qué sucede? Verifique el valor de $r = k/h^2$ en cada caso.

(b) Ahora, tomando $k = 0.0013$ resuelva

i. $u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = x(1-x)$,

ii. $u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)$.

Observe que ambos casos resultan estables en los primeros 50 pasos. ¿Qué ocurre con (i) para 100 pasos? ¿Y con (ii)? ¿Por qué resulta mucho más estable este último caso?

(c) Elija uno de los casos anteriores y resuelva analíticamente. Estudie el error del método contra la solucion exacta hasta el tiempo $T_f = 1$. Para ello, tome $r = 0.5$, diversos pasos de discretización Δt y Δx, y grafique $\log(E_n)$ en cada paso de tiempo, donde $E_n = \max_{\{0 \le j \le N\}}\{|e_j^n|\}$, $N = 1/(\Delta x)$.

Nota: Observe que el error decrece a medida que el tiempo avanza lo que indica que la cota (1) obtenida en el Ejercicio 1 no es demasiado buena.

Ejercicio 3 Dado $J \in \mathbb{N}$ sea $h = \frac{1}{J}$ y considerar el producto interno $(v,w) = h\sum_{j=0}^{J} v_j\, w_j$ para $v, w \in \mathbb{R}^{J+1}$, y sea $l_{2,h}^0$ el subespacio de $\mathbb{R}^{J+1}$ dado por $l_{2,h}^0 = \{v = (v_0, v_1, \ldots, v_J) \in \mathbb{R}^{J+1} : v_0 = v_J = 0\}$. Para cada $p = 1, \ldots, J-1$, sea $\varphi_p \in l_{2,h}^0$ definido por

$$\varphi_{p,j} = \sqrt{2}\sin(\pi p j h), \qquad j = 0 \ldots, J.$$

Probar que $\{\varphi_p : p = 1, \ldots, J\}$ es una base ortonormal de $l_{2,h}^0$.

Ejercicio 4 (Método explícito) Considere la ecuación $U_t = U_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas. Muestre que

(a) El método que se obtiene al utilizar diferencias forward en el tiempo y centradas en el espacio (del Ej. 1) es consistente con orden 1 en Δt y 2 en Δx, y estable en norma $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ para $0 \le r \le \frac{1}{2}$.

Sug. Para la $\|\cdot\|_\infty$, busque condiciones para que se satisfaga un principio del máximo.

(b) El método explícito de dos pasos que se obtiene al aplicar diferencias centradas en el tiempo

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

es consistente con orden 2 en Δt y Δx, pero no es estable para ningún $r > 0$.

Ejercicio 5 (Método implícito) Considere la ecuación $U_t = aU_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas, donde $a > 0$ es la constante de difusividad. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

Demuestre que

(a) El error de truncado es orden 1 en Δt y 2 en Δx.

(b) El método resulta incodicionalmente estable en norma $\|\cdot\|_2$ y en norma $\|\cdot\|_\infty$. ¿Qué obtiene con el método de Fourier?

Ejercicio 6 (Método theta) Para la ecuación $U_t = aU_{xx}$ se considera el siguiente método, con $0 \leq \theta \leq 1$:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra\{(\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}$$

(a) Estudie la estabilidad mediante el método de Fourier.

(b) Estudie el error de truncado. ¿Qué ocurre con el orden en Δt si $\theta = 1/2$?

(c) Implemente el método, tomando θ para parámetro. Para el método de Crank-Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$), estudie numéricamente si la condición $r \leq 1$ es necesaria para tener principio del máximo en el esquema.

Sug.: Tomar un dato inicial que valga cero en todos los nodos salvo en uno.

Ejercicio 7 Considere la ecuación del calor en $[0,1]$ con condiciones de Neumann en el borde.

$$\begin{cases} U_t(x,t) = & U_{xx}(x,t), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U_x(0,t) = & 0 \\ U_x(1,t) = & 0 \\ U(x,0) = & U_0(x). \end{cases}$$

Considere la discretización espacial de diferencias centradas junto al método del nodo ficticio (Ej. 7 de la Práctica 1).

(a) Implemente numéricamente los métodos que resultan de tomar una discretización temporal explícita e implicita de orden 1, junto con la discretización espacial mencionada.

(b) Analice la estabilidad en norma $\|\cdot\|_\infty$ de ambos métodos.

Ejercicio 8 Las ecuaciones de reacción-difusión son de la forma

$$U_t = \kappa U_{xx} + R(U)$$

donde $R(u)$ suele ser un término no-lineal. Para tener estabilidad incondicional, es conveniente tomar una discretización implícita en u_{xx}, pero, para evitar tener que resolver un sistema no-lineal en cada iteración es preferible utilizar un método explícito en $R(u)$. Considere la linealización

$$U_t = \kappa U_{xx} + \alpha U$$

con α constante, y el método explícito-implícito de orden 1:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \kappa r(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \alpha \Delta t u_j^n.$$

Consideraremos condiciones de Dirichlet homogeneas, y N pasos temporales: $T_f = (\Delta t)N$.

(a) Obtenga una expresión para la matriz de iteraciones M resultante: $u^{n+1} = Mu^n$.

(b) Muestre que $\|M\|_\infty \leq (1+\Delta t\alpha)$, y que por ende el método es incondicionalmente estable para $\alpha < 0$.

(c) Si $\alpha > 0$ muestre que existe una constante $C(\alpha, T_f)$ independiente de $\Delta x, \Delta t$, tal que $\|M^N\|_\infty \leq C$, y entonces el esquema también resulta incodicionalmente estable. ¿Cómo depende la constante C de los parámetros del problema α,T_f?

(d) Implemente el método para el caso $R(u) = u(1-u)$ (ecuación de Fischer) y $u_0(x) = \sin^2(2\pi x)$. Estudie numéricamente la estabilidad y compare con los resultados para el caso lineal.

Ejercicio 9 Para aproximar la ecuación $U_t = aU_{xx}$ con $a > 0$, $x \in (0,1)$, $t > 0$ con condiciones de borde periódicas y dato inicial $U(x,0) = U_0(x)$ se propone el esquema de Dufort-Frankel:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2ra\{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\}$$

(a) Demostrar, usando el método de Fourier, que el esquema es incondicionalmente estable.

(b) Demostrar que el esquema **no** resulta incondicionalmente consistente. Si se elige $\Delta x = \Delta t$, ¿A qué otra ecuación diferencial aproxima el esquema dado? ¿Qué condición impondría sobre Δt, Δx para asegurar la consistencia?

Ejercicio 10 Considerar el esquema en diferencias de tres capas completamente implícito (BDF2 en t) para la ecuación del calor $U_t = aU_{xx}$:

$$\frac{3}{2}u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2}u_j^{n-1} = ar\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right)$$

(a) ¿Cuál es el orden del error de truncado en Δx y en Δx?

(b) Muestre que el método es incondicionalmente estable.

Ejercicio 11 Para aproximar la ecuación $U_t = aU_{xx}$ se propone el siguiente esquema explícito de tres capas (Adams-Bashforth de 2 pasos en t):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\frac{3}{2}\delta_{xx}(u_j^n) - \frac{1}{2}\delta_{xx}(u_j^{n-1})}{(\Delta x)^2}$$

con $\delta_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$.

(a) Demostrar que el método es de orden 2 en Δt y Δx.

(b) Demostrar que el método propuesto es estable si $r \leq \frac{1}{2a}$ con $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Ejercicio 12 Los problemas unidimiensionales pueden resultar de configuraciones con simetría cilindrica o esférica. En dichos sistema de coordenadas es natural añadir condiciones de Neumann en el origen. Para la cara exterior consideramos, en este caso, condiciones de Dirichlet homogeneas, obteniendo el problema

$$\begin{cases} U_t(r,t) &= U_{rr}(r,t) + \frac{\alpha}{r}U_r(r,t), \quad \text{para } r \in (0,1), t > 0 \\ U_r(0,t) &= 0 \\ U(1,t) &= 0 \\ U(r,0) &= U_0(r). \end{cases}$$

donde $\alpha = 1, 2$ para los casos de coordenadas polares o esféricas, respectivamente.

(a) Desarrolle un esquema explíto en t y centrado de segundo orden en r. Implemente el algoritmo numéricamente, para las condiciones iniciales $U_0(r) = 1 - r^2$.

(b) Obtenga condiciones suficientes sobre $\gamma = \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$ para asegurar la estabilidad.

Ejercicio 13 Para aproximar la ecuación

$$U_t = U_{xx} \qquad x \in (0,1) \qquad t > 0 \qquad U(x,0) = U_0(x)$$

con condiciones de Dirichlet homogéneas, se propone el esquema

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\,\alpha L_{xx}(u_j^{n+1}) + r(1-\alpha)L_{xx}(u_j^n)$$

donde $L_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

(a) Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en $\|\cdot\|_2$.

(b) Demostrar que si $r \in [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$ se tiene principio del máximo.

Ejercicio 14 Para resolver la ecuación $U_t = (a(x)U_x)_x$ con condiciones de borde Dirichlet homogeneas, se consideran las discretizaciones espaciales de $(a(x)U_x)_x$ que surgen de tomar diferencias centradas usando la regla de la cadena (o no):

$$A_1(u^n) = a'(x_j)\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + a(x_j)\frac{u_{j+1} - 2u_j^n + u_{j-1}}{h^2}$$

y

$$A_2(u^n) = \frac{a(x_{j+1/2})u_{j+1} - (a(x_{j+1/2}) + a(x_{j-1/2}))u_j^n + a(x_{j-1/2})u_{j-1}}{h^2},$$

junto con diferencias forward en el tiempo, para obtener

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = A_q(u^n)$$

(a) ¿Cuál de las dos matrices A_1 ó A_2 es simétrica?

(b) Estudie principio del máximo para ambos esquemas.

Ejercicio 15 Dada la ecuación del calor en 2-dimensiones

$$U_t = U_{xx} + U_{yy} \quad \text{con} \quad (x, y) \in (0,1) \times (0,1) \qquad t > 0$$

Considere el método de diferencias explícito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + r_x(u_{i+1\,j}^{n} - 2u_{ij}^{n} + u_{i-1\,j}^{n}) + r_y(u_{i\,j+1}^{n} - 2u_{ij}^{n} + u_{i\,j-1}^{n})$$

donde $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$, y un dato inicial $u_0(x, y)$.

(a) Mediante el método de Fourier, halle condiciones sobre r_x, r_y que aseguren la estabilidad.

(b) Implemente el método para el caso de condiciones de Dirichlet homogéneas.

John Crank
Manchester 1916 - Londres 2006

Phyllis Nicolson
Macclesfield 1917 - Sheffield 1968