Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2016

Práctica N° 6: Ejercicio 19.

i) Probar que la cuadratura:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

es exacta para $f \in \mathcal{P}_2(a,b)$, siendo:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

ii) Dado un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Probar que la cuadratura

$$\int_R f \sim \frac{|R|}{4}\Big(f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)\Big)$$

es exacta para $f \in \mathcal{Q}_1(R)$.

iii) Considerar el problema:

$$\begin{cases} -\triangle u &= 1 & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

donde $\Omega = [-1,1] \times [0,1]$ y $\Gamma_1 = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$.

Considerar la partición $\Omega = R_1 \cup R_2$, donde $R_1 = [-1,0] \times [0,1]$ y $R_2 = [0,1]^2$ y escribir el problema variacional discreto usando un subespacio adecuado del espacio de funciones continuas definidas en Ω, tal que en cada rectángulo es una función de $\mathcal{Q}_1$.

Encuente las bases locales, calcule la matriz de rigidez y el vector del sistema discreto utilizando las cuadraturas de los ítems anteriores.