Topología

Segundo cuatrimestre - 2015

Sugerencias práctica 4

Compacidad y axiomas de separación

Compacidad

6. Por el absurdo, si K no está contenido en ningún X_n, hallar una sucesión de elementos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, con $x_{n_k} \in K \setminus X_{n_k}$ y contradecir la compacidad de K.

7. Para (a) $\Longrightarrow$ (c), probar que X es completo y totalmente acotado.

10. Para (a) $\Longrightarrow$ (b), tomar un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de $f^{-1}(K)$. Para cada $y \in K$, $\mathcal{U}^y = \{U \in \mathcal{U} : f^{-1}(y) \cap U \neq \varnothing\}$, tiene un subcubrimiento finito $\{U_i^y : i \in F_y\}$. Luego $f^{-1}(y) \subseteq \cup_{i\in F_y} U_i^y =: V^x$. Vía f, hallar un cubrimiento por abiertos de K, y elegir finitos valores de y, los llamamos $y_1, \cdots, y_n$. Concluir que $\{U_i^{y_j} : i \in F_{y_j}, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$ es subcubrimiento finito de $f^{-1}(K)$.

    Para (a) $\Longrightarrow$ (c), dado $F \subseteq X \times Z$ cerrado, para todo punto $(y, z) \notin (f \times 1_Z)(F)$ hallar un abierto de la forma $U \times V$ tal que $(y, z) \in U \times V \subseteq ((f \times 1_Z)(F))^c$.

    Para (c) $\Longrightarrow$ (d), sea $g : Z \to Y$. Si $p_Y : Z \times Y \to Y$ es la proyección sobre Y y $(\mathrm{id}_Z, g) : Z \to Z \times Y$, escribir $g = p_Y \circ (\mathrm{id}_Z, g)$ y descomponer el pullback de f por g en dos pullbacks.

11. Se puede usar cualquiera de las definiciones equivalentes de función propia.

Axiomas de separación

28. Sea Z espacio topológico y $f : Z \to X$ una función. Supongamos $f_\alpha \circ f$ continua para todo α. Para ver que f es continua, probar que para todo F cerrado en X, $f^{-1}(F)$ es cerrado. Por hipótesis, para todo $x \notin F$, existe α_x tal que $f_{\alpha_x}(F) = \{0\}$ y $f_{\alpha_x}(x) = 1$. Luego, se puede escribir $F = \bigcap\limits_{x\notin F} f_{\alpha_x}^{-1}(\{0\})$.

29. Considerar $J = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \bar{U} \cap \bar{V} = \varnothing\}$.

30 . Para ver que no es normal, considere los cerrados $F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Q}\}$, $G = \{(x, -x) : x \in \mathbb{I}\}$.

31. Para cada $x \in A$, existe $f_a : X \to I$ continua tal que $f_x(x) = 0$, $f_x(B) = \{1\}$. $\mathcal{U} = \{U_x = f_x^{-1}([0, 1/2)) : x \in A\}$ tiene un subcubrimiento finito $\{U_{x_i} : i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$. Si $g = \max\{f_{x_i}, 1/2\}$, $f = 2g - 1$ sirve.

33. Si X es localmente compacto pero no compacto, considere X^*.

Grupos topológicos

41. Como $\mathrm{mult}(e, e) = e$, existe un entorno básico $V_1 \times V_2$ de (e, e) tal que $\mathrm{mult}(V_1 \times V_2) \subseteq U$. El abierto $V = (V_1 \cap V_2) \cap (V_1 \cap V_2)^{-1}$ cumple $V.V \subseteq U$ y $V = V^{-1}$.

44. $GL(n, \mathbb{R})$ no es conexo ni compacto, $SL(n, \mathbb{R})$ es conexo, no compacto, $O(n, \mathbb{R})$ es compacto no conexo, $SO(n, \mathbb{R})$ es conexo y compacto.