Topología

Segundo cuatrimestre - 2015

Práctica 9

Clasificación de revestimientos

---

1. *a*) Pruebe que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es null-homotópica.

   b) Pruebe que toda función continua $P^2 \to S^1$ es null-homotópica.

   c) Exhiba una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea null-homotópica.

2. Pruebe que si X es arcoconexo y localmente arcoconexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \to S^1$ es null-homotópica.

3. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Considerando el isomorfismo $\pi_1(T, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones, describa los revestimientos de T asociados a los subgrupos

   a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

4. *a*) Pruebe que todo isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $T \to T$ que deja quieto a x_0.

   b) Pruebe que si E es un revestimiento conexo de T, entonces E es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ ó T.

   Sugerencia: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base $\{a_1, a_2\}$ de F tal que $\{na_1\}$ es base de N para algún n o bien $\{na_1, ma_2\}$ es base de N para ciertos n, m.

5. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p : \tilde{G} \to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Pruebe que la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ y la función $\nu : G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ y $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ que hacen de $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Pruebe además que p es un morfismo.

6. Pruebe que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

7. Sea $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento simplemente conexo de X, y sea $A \subseteq X$ un subespacio arcoconexo y localmente arcoconexo, con $\tilde{A} \subseteq \tilde{X}$ una componente arcoconexa de $p^{-1}(A)$. Muestre que $p : \tilde{A} \to A$ es el revestimiento correspondiente al núcleo del morfismo $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

8. Sea $H = \bigcup_{n \geqslant 1} \partial B_{1/n}(1/n, 0) \subset \mathbb{R}^2$ el *arito Hawaiano*.

   a) Pruebe que H no es semilocalmente simplemente conexo.

b) Sea $C(H)$ el *cono* de H, que consiste en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por la unión de todos los segmentos que unen un punto de $H \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con el punto $(0,0,1)$. Pruebe que $C(H)$ es semilocalmente simplemente conexo pero no localmente simplemente conexo.

9. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = r \circ q$.

   a) Pruebe que si p y r son revestimientos, también lo es q. Pruebe que q es normal si p lo es.

   b) Pruebe que si p y q son revestimientos, también lo es r. ~~Pruebe que r es normal si q lo es.~~

   c) Pruebe que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

10. Sea $p : \tilde{E} \to B$ revestimiento universal. Dado un revestimiento $r : E \to B$, pruebe que existe un revestimiento $q : \tilde{E} \to E$ tal que $r \circ q = p$.

11. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$. El conjunto de transformaciones deck $\mathrm{Deck}(p)$ forman un grupo con la operación dada por la composición.

    a) Se dice que $p : E \to B$ es *normal* si para todo $b_0 \in B$ y $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una transformación deck tal que $h(e_0) = e_1$. Pruebe que p es normal si y sólo si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.

    b) Pruebe que si p es normal, $\mathrm{Deck}(p)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.

    c) Concluya que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

12. Describa el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.

13. Sea E un espacio topológico, y G un grupo que actúa en E de manera propiamente discontinua. Sea $p : E \to B$ es un revestimiento. Pruebe que:

    a) La proyección al cociente $q : E \to E/G$ es un revestimiento normal.

    b) Si E es arcoconexo, entonces G es el grupo de transformaciones deck de q.

    c) Existe un revestimiento $r : E/G \to B$ tal que $r \circ q = p$.

    d) Todo subgrupo H de $\mathrm{Deck}(p)$ actúa en E de manera propiamente discontinua, es decir, para todo $e \in E$, existe un abierto $U \ni e$ tal que $h(U) \cap U = \varnothing$ para todo $h \in H$.