Topología

Segundo cuatrimestre - 2015

Práctica 3

Conexión y arcoconexión

Conexión

1. Sea X un conjunto y τ, τ' dos topologías sobre X. Pruebe que si (X, τ) es un espacio topológico conexo y $\tau' \subset \tau$, entonces (X, τ') es un espacio topológico conexo.

2. Pruebe que:

   (a) si X es un espacio conexo y $A \subsetneq X$ es un subconjunto propio no vacío, entonces $\partial A \neq \emptyset$;

   (b) recíprocamente, si X es disconexo entonces existe $B \subsetneq X$ un subconjunto propio no vacío tal que $\partial B = \emptyset$.

3. (a) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X tales que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Pruebe que $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.

   (b) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

4. ¿Cuáles de los siguientes espacios dotados de sus topologías del orden lexicográfico son conexos?

   (a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.

   (b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.

   (c) $[0, 1) \times [0, 1]$.

   (d) $[0, 1] \times [0, 1)$.

5. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que si A es conexo, entonces $\bar{A}$ también. Más aún, todo subespacio B de X tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ resulta conexo. ¿Qué ocurre con ∂A y con A°?

6. Sea X un espacio y $A \subseteq X$ un subconjunto conexo. Si $B \subseteq X$ es tal que $A \cap B \neq \varnothing$ y $A \cap (X \smallsetminus B) \neq \varnothing$, entonces $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

7. Sea $p : X \to Y$ una función cociente. Pruebe que si Y es conexo y además $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.

8. Muestre que entre los espacios $(0, 1), (0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos. Concluya que la existencia de funciones subespacio $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ no implica que X e Y sean homeomorfos.

9. (a) Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

   (b) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Pruebe que existe un punto fijo de f.

10. (a) Muestre que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo.

    (b) Muestre que si $B \subset S^2$ es finito, entonces $S^2 \setminus B$ es conexo.

11. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (a) X es localmente conexo.

    (b) Las componentes de todo subespacio abierto de X son abiertas en X.

(c) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X.

Concluya que si X localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.

12. Una función $f : X \to Y$ se dice *localmente constante* si para todo $x \in X$, existe U entorno abierto de x tal que $f|_U$ es constante. Pruebe que si f es localmente constante y X es conexo, entonces f es constante.

Arco-conexión

13. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ la curva *seno del topólogo*, equipada con la topología de subespacio.
$$T = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leq 1\}$$
Muestre que T es arco-conexa, y que sin embargo $\overline{T} \subset \mathbb{R}^2$ no es arco-conexa.

14. Pruebe que si $A, B \subset X$ son subespacios arco-conexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es arco-conexo.

15. Pruebe que si X e Y son arco-conexos, entonces $X \times Y$ es arco-conexo.

16. (a) Pruebe que si X es localmente arco-conexo y $U \subset X$ es abierto, entonces U es localmente arco-conexo.
    (b) Pruebe que si X es localmente arco-conexo y conexo, entonces es arco-conexo.
    (c) Concluya que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces
$$U \text{ es conexo} \Leftrightarrow U \text{ es arco-conexo}$$

Componentes

17. Calcule las componentes conexas de $\mathbb{R}_l$ y $\pi_0(\mathbb{R}_l)$.

18. Pruebe que el cuadrado ordenado $I \times I$ es localmente conexo pero no es localmente arco-conexo. Calcule las componentes conexas de $I \times I$ y $\pi_0(I \times I)$.

19. Dados x, y puntos de X, decimos que $x \sim y$ si no existe separación $X = A \cup B$ de X en dos conjuntos abiertos y disjuntos tales que $x \in A$ e $y \in B$.
    (a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman *cuasi-componentes* de X.
    (b) Muestre que cada componente de X está contenida en una cuasi-componente.
    (c) Determine las cuasi-componentes, las componentes conexas y las arco-conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (donde K denota el conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, y $-K$ denota el conjunto $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$).
        i. $(K \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$.
        ii. $(A \setminus \{(0, \frac{1}{2})\})$.
        iii. $B \cup ([0,1] \times \{0\})$.
        iv. $(K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K)$.

Adicional

20. Sean $A \subseteq X$ subespacio, $f : A \to Y$ función continua. Pruebe que:
    (a) Si A es no vacío y X e Y son conexos entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
    (b) Si A es no vacío y X e Y son arcoconexos entonces $X \cup_f Y$ es arcoconexo.
    (c) Si Y es conexo y si A interseca cada componente conexa de X, entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
    (d) Si A es conexo y no vacío y $X \cup_f Y$ es conexo, entonces Y es conexo.