

Topología

Segundo cuatrimestre - 2015

Práctica 8

Teorema de van Kampen

- Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:
 - $T^2 \setminus \{\text{pt}\}$, el toro perforado en un punto;
 - $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{\text{pt}\}$, el plano proyectivo real perforado en un punto;
 - $S^n \vee S^n$, la unión de dos esferas por un punto;
 - $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$;
 - $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$;
 - $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;
 - $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.
- Sea $n \geq 3$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Pruebe que $\mathbb{R}^n \setminus A$ es simplemente conexo.
- Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ la unión de abiertos convexos $X_1 \cdots X_n$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ para todo i, j, k . Muestre que X es simplemente conexo.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n la circunferencia en \mathbb{R}^2 con centro en $(n, 0)$ y radio n . Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0, 0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre $\ast_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n)$, el mismo que el grupo fundamental del wedge infinito $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$. Muestre que X y $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$ son homotópicamente equivalentes, pero no homeomorfos.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n la circunferencia en \mathbb{R}^2 con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0, 0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo no numerable.
- Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } j \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } d(x, (j - \frac{1}{2}, 0)) = \frac{1}{2}\}$. Determine $\pi_1(Y_n, 0)$.
- Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas por el origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.
- Sea X el espacio cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto. Calcule $\pi_1(X)$.
- Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión k , con $0 \leq k \leq n - 2$, determine el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus L)$.
 - Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) = \mathbb{Z}$.
- Sea $K = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:
 $(x = x' \text{ e } y = y')$ ó $(\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x')$ ó $(\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y + y' = 1)$
El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcule (una presentación d)el grupo fundamental de K .