Topología

Segundo cuatrimestre - 2015

Práctica 7

Revestimientos y Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

Revestimientos.

1. Pruebe que si X es un espacio e Y es discreto, entonces la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es un revestimiento.

2. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.

3. Pruebe que las siguientes funciones son revestimientos:

    a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$.
    b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.
    c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al plano proyectivo.
    d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.
    e) $p : E \to B$, $p(x,y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, donde $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}$ ó $y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z,w) \in S^1 \times S^1 : z = 1$ ó $w = 1\}$.

4. Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

5. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.

6. Pruebe que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es. Usar este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.

7. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento.

8. Pruebe que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

9. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

10. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Pruebe que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es null homotópica.

11. Sea G un grupo topológico y X un G-espacio (ver ej. 31 práctica 2). Decimos que la acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, $g \neq e$. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

    a) Pruebe que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.

    b) Pruebe que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.

    c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ,donde $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$. Pruebe que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Möbius.

    d) Calcular el grupo fundamental de la banda de Möbius.

12. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $e \in E$, $b = p(e)$.

    a) Puebe que que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e) \to \pi_1(E, e)$.

    b) Pruebe que si la fibra E_b es simplemente conexa, entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.

    c) Pruebe que si E es simplemente conexo, entonces hay una biyección entre $\pi_1(B, b)$ y $\pi_0(E_b)$.

13. Sabiendo que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, calcule el grupo fundamental de los siguientes espacios.

    a) $X = S^1 \times [0, 1]$, un cilindro.

    b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.

    c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el plano pinchado.

    d) $X = M$, la banda de Möbius.

    e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.

    f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta o un plano.

Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

14. Demuestre que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

15. Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

16. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Pruebe que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

17. Pruebe que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.