

Topología
Segundo cuatrimestre - 2015
Práctica 2
Topologías iniciales y finales

Subespacios

1. Sea X un espacio topológico. Pruebe que si $Z \subset A$ y A subespacio de X , entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio del subespacio X .
2. Sea X un conjunto totalmente ordenado, dotado de la topología del orden, y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto.
 - (a) Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente concide con la topología de Y como subespacio de X .
 - (b) Y se dice **convexo** si satisface $a, b \in Y \Rightarrow (a, b) \subset Y$. Pruebe que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.
3. Considere a $I = [-1, 1]$ como subespacio de \mathbb{R} . ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I ? ¿Cuáles son abiertos en \mathbb{R} ?

$$\begin{array}{lll} A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\} & B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\} & C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} \\ D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\} & E = \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\} & F = \{x : |x| \leq 1\} \end{array}$$

Productos

4. Sean X e Y espacios topológicos. Sean A un subespacio de X , B un subespacio de Y . Pruebe que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.
5. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que las proyecciones $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas. Halle ejemplos en los que no sean cerradas.
6. Sean X, Y, Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \rightarrow Z$ una función. f se dice **continua en x** si $f(-, y) : X \rightarrow Z$ es continua para todo $y \in Y$. Análogamente, f se dice **continua en y** si $f(x, -) : Y \rightarrow Z$ es continua para todo $x \in X$.
 - (a) Pruebe que si f es continua, entonces es continua en cada variable.
 - (b) Dé un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.
7. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Pruebe que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluya que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y , entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.
8.
 - (a) Pruebe que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{R}_d es el conjunto \mathbb{R} dotado de la topología discreta. Compare con la topología usual de \mathbb{R}^2 .
 - (b) Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Compare las siguientes topologías sobre $I \times I$:
 - la topología producto;
 - la topología del orden para el orden lexicográfico;
 - la topología producto $I_d \times I$, donde I_d denota a I con la topología discreta.

9. Sea \mathbb{R}_l el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es \mathbb{R} y cuya topología tiene como base de abiertos al conjunto $\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea L una recta en el plano. Describa la topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.
10. (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Pruebe que las funciones $f : X \rightarrow X \times Y$ y $g : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.
- (b) Sea X un espacio métrico con métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que la topología inducida por la métrica es la menos fina que hace que d sea una función continua.
Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.
11. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subset X_i$. Decida cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
- (a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X .
- (b) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.
12. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto con proyecciones $\{p_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$. Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X , pruebe que $x_\alpha \rightarrow x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \rightarrow p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?
13. Se define en \mathbb{R} la métrica acotada como $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$. Pruebe que induce la misma topología que la usual. Sea \mathbb{R}^ω el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en \mathbb{R}^ω la métrica uniforme como $\bar{\rho}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$. Verifique que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.
14. Decida si las siguientes funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en \mathbb{R} la topología usual y tomando en \mathbb{R}^ω la topología uniforme, la topología producto y la topología caja.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots) \quad g(t) = (t, t, t, \dots) \quad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots)$$

15. Decida si las siguientes sucesiones convergen en \mathbb{R}^ω con las topologías uniforme, producto y caja.
- (a) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, 2, 2, 2, \dots), (0, 0, 3, 3, \dots), \dots$
- (b) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), \dots$
- (c) $(1, 0, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), \dots$
- (d) $(1, 1, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \dots$
16. Calcule la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a las topologías uniforme, producto y caja.
17. Sean (X_n, d_n) espacios métricos. Pruebe que $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.¹

Cocientes

18. (a) Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Pruebe que si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

¹Sugerencia: Considere $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{n} \right\}$.

- (b) Si $A \subset X$, una **retracción** de X sobre A es una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Pruebe que una retracción es una aplicación cociente.
19. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada. Muestre que:
- (a) si $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un cociente cerrado pero no abierto;
- (b) si $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es un cociente que no es ni abierto ni cerrado.
20. Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ por la fórmula
- $$\begin{cases} g((x, y)) = (x, 0) & \text{si } x \neq 0 \\ g((0, y)) = (0, y) \end{cases}$$
- (a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?
- (b) Halle una base para la topología cociente en Z inducida por g .
21. Sea G un grupo. Un G -espacio es un espacio topológico X junto con una acción $\cdot : G \times X \rightarrow X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo $g \in G$. Pruebe que los siguientes espacios topológicos son G -espacios.
- (a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.
- (b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.
- (c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
- (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.
22. Si X es un G -espacio, definimos una relación de equivalencia \sim_G en X como sigue:

$$x \sim_G y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Notamos X/G al espacio cociente X / \sim_G y $p : X \rightarrow X/G$ a la proyección. Pruebe que p es abierta; y que si G es finito, entonces p también es cerrada.

23. (a) Pruebe que el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} (ejercicio 20, a) es homeomorfo a S^1 .
- (b) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 20, b) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.
- (c) Pruebe que el espacio cociente S^2/\mathbb{Z}_2 (ejercicio 20, c) es homeomorfo a $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$, el plano proyectivo real. (Recordar que el plano proyectivo real se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$, y $(x, 0)$ con $(1 - x, 1)$ para todo $x \in [0, 1]$).
- (d) Pruebe que el espacio cociente X/\mathbb{Z} (ejercicio 20, d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$).

Familias iniciales y finales

24. Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva y final entonces es subespacio.
25. Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.
26. Sea X un espacio topológico con topología τ , y sea $\mathfrak{S} = \{0, 1\}$ el espacio de **Sierpinski**, con topología $\{\emptyset, \{0\}, \mathfrak{S}\}$.

- (a) Pruebe que $U \subset X$ es abierto si y sólo si $\mathbf{1} - \chi_U : X \rightarrow \mathfrak{S}$ es continua, donde χ_U es la función característica de U .
- (b) Pruebe que la familia $\{\chi_U : X \rightarrow \mathfrak{S}\}_{U \in \tau}$ es inicial.
27. Sea k un cuerpo. Dotamos a k de la topología cofinita. Pruebe que $\{p : k^n \rightarrow k\}_{p \in k[x_1, \dots, x_n]}$ es una familia inicial para la topología Zariski en k^n .
28. Sea $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $e : X \rightarrow \prod X_i$ la *función evaluación*, definida por

$$e(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

Pruebe que $e : X \rightarrow \text{Im}(e)$ es abierta.

29. Decimos que $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ *separa puntos* de X si para todo $x \neq y \in X$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Pruebe que $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ es un familia inicial para la topología de X y separa puntos de X si y sólo si la función evaluación $e : X \rightarrow \prod X_i$ es subespacio, donde $\prod X_i$ tiene la topología producto.
30. Sea $X = \coprod X_i$, dotado de la topología coproducto. Dada una familia de funciones $\{f_i : X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$, existe una única $f : X \rightarrow Y$ tal que $f \circ \iota_i = f_i$ para todo $i \in I$, donde $\iota_i : X_i \rightarrow X$ es la función inclusión. Pruebe que $\{f_i\}_{i \in I}$ es familia final si y sólo si f es final.