Topología

Segundo cuatrimestre - 2015

Práctica 10

Homología

---

1. Halle todos los grupos abelianos posibles M en la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$$

2. Pruebe que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga de homología

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \dots$$

3. Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Pruebe que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

4. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcule la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\dots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

5. Pruebe que si $i : A \to X$ es un retracto, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$, y que si i es retracto por deformación débil, entonces i_* es isomorfismo.

6. Sea X espacio topológico, $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ para todo n.

7. Pruebe que si A es un retracto por deformación débil de un espacio X entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

8. Pruebe que si (X, A, B) es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \dots$$

9. Sea X un espacio contráctil y sea A un subespacio de X. Pruebe que $H_n(X, A)$ es isomorfo a $\tilde{H}_{n-1}(A)$.

10. Sea X espacio topológico, $A \subset X$ subespacio. Si CA es el *cono* $(A \times I)/(A \times \{0\})$ de A, considere $X \cup CA$ el espacio que se obtiene de identificar la base del cono $A \times \{1\}$ con $A \subseteq X$. Pruebe que $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA)$.

11. *a*) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos base x_i, probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

    b) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in I} S^k)$.

12. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{x_1, \cdots, x_m\}$

13. Calcule la homología del cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto.

14. Sea X espacio topológico. Muestre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ para todo $n \geqslant 0$, donde ΣX es la *suspensión* de X, que se define como sigue $\Sigma X = X \times I/\sim$, $(x, 0) \sim (x', 0)$, $(x, 1) \sim (x', 1)$ para todo $x, x' \in X$.

15. Sea X un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ con U_i abiertos tales que toda intersección $\bigcap_{i=1}^k U_{i_k}$ es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geqslant n-1$ y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.