

Topología
Segundo cuatrimestre - 2015
Práctica 1
Espacios topológicos

Ejemplos

1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y . Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

2. Sea X un conjunto infinito, sea $x_0 \in X$ y sea $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0 . Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.
3. Sea \mathcal{F} el conjunto de todos los cerrados acotados de \mathbb{R} en su topología usual, junto con \mathbb{R} . Pruebe que existe una topología en \mathbb{R} para la cual \mathcal{F} es el conjunto de todos los cerrados.
4. Un subconjunto U de \mathbb{R}^2 se dice *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de \mathbb{R}^2 es una topología sobre \mathbb{R}^2 y compárela con la topología usual.

Construcción de topologías

5. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos* \mathcal{F} en X es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\emptyset \neq \mathcal{F}_x \in \mathcal{P}(X)$ de manera que:

(E1) $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}_x$;

(E2) si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;

(E3) si $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;

(E4) dado $A \in \mathcal{F}_x$, existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

Pruebe que:

- (a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

entonces \mathcal{F} es un sistema de filtros de entornos en X .

- (b) Si \mathcal{F} es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces τ es una topología sobre X .

- (c) Las construcciones del ítem (a) y del ítem (b) son inversas.

6. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura* en X si

- (C1) $c(\emptyset) = \emptyset$;
 (C2) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;
 (C3) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;
 (C4) si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

Pruebe que:

- (a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \bar{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en X .

- (b) Si $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X , entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X .

- (c) Las construcciones del ítem (a) y del ítem (b) son inversas.

7. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

es un operador de clausura en X . Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Clausura, interior, frontera

8. Pruebe las siguientes inclusiones y halle ejemplos en los que sean estrictas.

- (a) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$;
 (b) $\overline{A \setminus B} \subseteq \bar{A} \setminus \bar{B}$;
 (c) $\bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$;
 (d) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\circ} \subseteq (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^{\circ}$;
 (e) $(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^{\circ} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{\circ}$.

9. *Topología del complemento finito.* Sea X un conjunto. Sea $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ es una topología sobre X . Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

10. Sea X un conjunto no vacío y sea $x_0 \in X$. Pruebe que:

- (a) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X .
 (b) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X .

Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

11. *Topología del orden.* Considere el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X .

- (a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,

- (b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
- (c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
- (d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
- (e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

12. Pruebe que todo cerrado de \mathbb{R}^2 es la frontera de un subconjunto de \mathbb{R}^2 .

El reticulado de topologías, bases y subbases

13. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X . Pruebe que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X ?
14. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X que cumple que
- todo elemento de \mathcal{A} es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, y
 - si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de \mathcal{A} es abierto para τ , entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a \mathcal{A} (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la *topología generada* por \mathcal{A} .

Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

15. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Sea $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y sea $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$ donde $R_x = \{y \in Y : x < y\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden.
16. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de \mathbb{R} :
- $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$,
 - $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$,
 - $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$,
 - $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}$, con $K = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$
 - $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
 - $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
 - $\mathcal{B}_7 = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$.

- (a) Muestre que cada una de la colecciones $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_7$ es una base para una topología en \mathbb{R} y compare las topologías correspondientes.
 - (b) Muestre que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una subbase para la topología generada por \mathcal{B}_1 .
 - (c) Determine la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.
17. Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que \mathcal{B} es base de una topología en \mathbb{R} . Describa el interior de los subconjuntos de \mathbb{R} con respecto a ella.
18. *Topología Zariski*. Considere el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k (e.g. $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$),

$$k[x] = k[x_1, \dots, x_n].$$

Para cada subconjunto $S \subset k[x]$ se define el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : p(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad \forall p \in S\}.$$

Verifique las siguientes propiedades:

- (a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S .
- (b) $V(\{0\}) = k^n$ y $V(\{1\}) = \emptyset$. Si $S \subset T$, entonces $V(S) \supset V(T)$.
- (c) Si $I, J \subset k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
- (d) Si $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$. Los items b), c), d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n .
- (e) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.
- (f) Si $f \neq 0$ entonces D_f es denso.

Redes

19. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Pruebe que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

- (a) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a la constante.
- (b) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
- (c) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x , entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
- (d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Suponga que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x'_k)_{k \in \Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \quad \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x .

20. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Pruebe que

$$\bar{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \rightarrow x\}$$

21. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ . Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x .

Sugerencia: Para probar \Rightarrow), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α .

Funciones continuas

22. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \rightarrow Y$ es equivalente a pedir que f sea continua.

- (a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ ($y = f(x)$) existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$
- (b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$ se tiene que $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$
- (c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- (d) Si \mathcal{B} es una base para la topología de Y , entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
- (e) Si \mathcal{S} es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

23. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ la *función característica* de E , ie,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E .

24. (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Pruebe que g es un homeomorfismo.

(c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Se define $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

25. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.

(a) Pruebe que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .

(b) Sea $h : X \rightarrow Y$ la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Pruebe que h es continua.

26. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

(a) Pruebe que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

(b) Pruebe que si \mathcal{A} es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

(c) Encuentre un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

(d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Muestre que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.