Topología

Segundo Cuatrimestre 2015

Primer Parcial - 7/10/2015

Nombre y apellido: LU:

---

1. Sea X un espacio topológico. Se define en X la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si x e y pertenecen a la misma componente conexa. Probar que las componentes conexas de $X/_\sim$ son unipuntuales.

   Resolución 1 **Manera 1:** *Sea $C \subseteq X/_\sim$ una componente conexa. Consideramos $p|_{p^{-1}(C)} : p^{-1}(C) \to C$ la restricción de la proyección al cociente $p : X \to X/_\sim$. Como C es cerrado y saturado, $p|_{p^{-1}(C)}$ resulta cociente. Además, C es conexo y las fibras $p^{-1}(p(x)) = C_x$ son conexas. Por ejercicio 7 de la práctica 3, $p^{-1}(C)$ es conexo. Luego, C no puede tener más de dos puntos.*

   Manera 2: *Sea $C \subseteq X/_\sim$ una componente conexa. Supongamos que C tiene más de un elemento. Así, $p^{-1}(C)$ es disconexo y por lo tanto existen abiertos (y cerrados) disjuntos U, V de $\subseteq p^{-1}(C)$ tales que $p^{-1}(C) = U \cup V$. Como $C \subseteq X/_\sim$ es cerrado y p continua, $p^{-1}(C)$ es cerrado, y entonces U y V son cerrados de X. Veamos que $\{p(U), p(V)\}$ es una desconexión de C. En primer lugar, $p(U) \cup p(V) = p(U \cup V) = p(p^{-1}(C)) = C$. Además, si existiera $z \in p(U) \cap p(U)$, entonces $z = p(x) = p(y)$ para ciertos $x \in U$, $y \in V$ en la misma componente conexa C_z de X. En ese caso, podríamos construir una desconexión $\{C_z \cap U, C_z \cap V\}$ de C_z, lo cual es absurdo. Luego, $p(U) \cap p(V) = \varnothing$. Por último, $p(U)$, $p(V)$ son cerrados de C pues $p^{-1}(p(U)) = U$, $p^{-1}(p(V)) = V$, donde las igualdades se deducen del hecho de que las fibras $p^{-1}(z) = C_z$ son conexas, por lo que están contenidas en U o en V. Concluimos que C es unipuntual.*

2. Probar que si $f : X \to Y$ es propia y suryectiva y X es regular, entonces Y es regular.

   Resolución 2 *Sean $y \in Y$, $F \subseteq Y$ cerrado con $y \notin F$. Consideramos los subconjuntos disjuntos de X $K := f^{-1}(y)$ y $G := f^{-1}(F)$. El primero resulta compacto porque f es propia. Usando la regularidad de X, podemos hallar para cada $x \in K$ abiertos disjuntos U_x y V_x de manera que $x \in U_x$ y $G \subseteq V_x$. La compacidad de K permite encontrar finitos de esos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de manera que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Así, los abiertos disjuntos $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$, $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$ verifican que $K \subseteq U$, $G \subseteq V$. Es fácil chequear que $Y \setminus f(X \setminus U)$, $Y \setminus f(X \setminus V)$ son abiertos disjuntos de Y (recordar que f es propia y en particular cerrada) que satisfacen $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$, $F \subseteq Y \setminus f(X \setminus V)$.*

   Si en la definición de regular incluimos T_1, nos restaría probar que los puntos son cerrados en Y. Para verlo, alcanza con mostrar que $f^{-1}(y)$ es cerrado en X para todo $y \in Y$ (pues f es cociente). Por hipótesis, $f^{-1}(y)$ es compacto en un T_2 y por lo tanto es cerrado.

3. Sean X_1, X_2, Y espacios topológicos y $p : X_1 \to X_2$ una función continua suryectiva. Sea $\varphi : C(X_2, Y) \to C(X_1, Y)$ la función definida por $\varphi(f)(x) = f(p(x))$. Probar que si X_1 es compacto y X_2 es T_2, entonces φ es subespacio.

Resolución 3 *Probamos en primer lugar que φ es continua. Alcanza con chequear que la preimagen por φ de los abiertos subbásicos es abierta. Sea $W(K,U) \subseteq C(X_1,Y)$ abierto subbásico; por definición $\varphi^{-1}(W(K,U)) = \{f \in C(X_2,Y) : f(p(K)) \subseteq U\} = W(p(K),U)$, que es un abierto subbásico de la topología de $C(X_2,Y)$ dado que $p(K)$ es compacto.*

Para mostrar que es inicial, alcanza con ver que todo abierto subbásico $W(H,V)$ de $C(X_2,Y)$ es un abierto de la topología inicial inducida por φ. Como p es suryectiva, se tiene $p(p^{-1}(H)) = H$ y en consecuencia $W(H,V) = W(p(p^{-1}(H)),V) = \{f \in C(X_2,Y) : f(p(p^{-1}(H))) \subseteq V\}$. Como $p^{-1}(H)$ es compacto (se sigue de que $H \subseteq X_2$ es cerrado y por lo tanto $p^{-1}(H)$ es un cerrado del compacto X_1), $W(H,V)$ coincide con el abierto de la topología inicial $\varphi^{-1}(W(p^{-1}(H),V))$.

4. Un espacio topológico X se dice *compactamente generado* si para todo $F \subseteq X$ vale que F es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado en K para todo $K \subseteq X$ compacto (es decir, las inclusiones de sus compactos $\{\iota_K : K \hookrightarrow X : K \subseteq X \text{ compacto}\}$ son una familia final).

   a) Probar que X es compactamente generado si y sólo si existe $q : Z \to X$ cociente, con Z localmente compacto.

   b) Deducir que si X es compactamente generado e Y es localmente compacto y T_2, entonces $X \times Y$ es compactamente generado.

Resolución 4 a*) $\Rightarrow$) Por el ejercicio 30 de la práctica 2, la función $q : \coprod_{K \subseteq X \text{ comp.}} K \to X$ inducida por las inclusiones ι_K es final. Veamos que esta sirve. En primer lugar, es suryectiva porque los puntos son compactos y en consecuencia es cociente. Además, el espacio $Z := \coprod_{K \subseteq X \text{ comp.}} K$ es localmente compacto pues cada compacto $K \subseteq X$ resulta un subespacio abierto y compacto de Z.*

$\Leftarrow$) Sea $F \subseteq X$ tal que $F \cap K$ es cerrado en K para todo compacto $K \subseteq X$. Para ver que F es cerrado, mostraremos que $q^{-1}(F)$ es cerrado. Sea $z \in {}^{-1}(F)$, de manera que existe $(z_\alpha) \subseteq q^{-1}(F)$ red convergente a z. Como Z es localmente compacto, hay un entorno compacto $H \ni z$. Podemos suponer entonces que $(z_\alpha) \subseteq H$ reemplazando por una subred de ser necesario. De la continuidad de q se sigue que $q(z_\alpha) \to q(z)$. Pero además $q(z_\alpha) \subseteq q(H) \cap F$ que es cerrado en $q(H)$ por hipótesis y así $q(z) \in q(H) \cap F$. En particular, $z \in q^{-1}(F)$, lo que muestra que $q^{-1}(F)$ es cerrado.

b*) En virtud del ítem anterior, debemos encontrar una función cociente con dominio localmente compacto y codominio $X \times Y$. Como X es compactamente generado, sabemos que existe $q : Z \to X$ cociente con Z localmente compacto; así $q \times 1_Y : Z \times Y \to X \times Y$ es cociente porque Y es localmente compacto y T_2. Sólo resta observar que $Z \times Y$ es localmente compacto porque Z e Y lo son.*

5. Sea X un espacio topológico que se obtiene del cuadrado $I \times I$, identificando un par de lados opuestos vía un homeomorfismo $h : I \to I$; es decir, $X = I \times I/_{(x,0)\sim(h(x),1)}$. Probar que X es homeomorfo o bien al cilindro o bien a la banda de Möbius.

Resolución 5 *La primera observación clave es que un homemorfismo $I \to I$ es estrictamente monotóno (sale usando conexión). En consecuencia, la estrategia será demostrar* *que si el homemorfismo es creciente obtenemos el cilindro C y en caso contrario, la banda de Möbius M.*

Sea $h : I \to I$ un homeomorfismo creciente. Supongamos que identificamos vía h los dos lados verticales $\{0\} \times I$, $\{1\} \times I$. Necesitamos construir un homeomorfismo entre $I \times I/_{(0,t)\sim(1,h(t))}$ y C; para eso vamos a definir un homemorfismo $f : I \times I \to I \times I$ que pase bien a los cocientes. La manera de lograr esto es que f coincida con la identidad en $\{0\} \times I$ y con h en $\{1\} \times I$. En el interior del cuadrado la extendemos usando convexidad, es decir:

$$f(s,t) = (s, t(1-s) + h(t)s), \text{ para } s, t \in I.$$

f es continua y biyectiva y por lo tanto resulta un homemorfismo. (Justificación de la biyectividad:

- *inyectiva: $f(s,t) = f(s,t')$ implica $(t - t')(1 - s) = (h(t') - h(t))s$. Como h es creciente no puede ser $t < t'$ pues en tal caso la expresión de la izquierda es negativa y la de la derecha positiva.*
- *sobreyectiva: dado $(s,u) \in I \times I$, como $f(s,0) = (s,0)$ y $f(s,1) = (s,1)$, por Bolzano existe $t \in I$ tal que $f(s,t) = (s,u)$.)*

El homeomorfismo buscado es el punteado en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d] & I \times I \arrow[d] \\ I \times I/_{(0,t)\sim(1,h(t))} \arrow[r, dotted, "\bar{f}"'] & I \times I/_{(0,t)\sim(1,t)} = C \end{tikzcd}$$

Es sencillo verificar que la función $g : C \to I \times I/_{(0,t)\sim(1,h(t))}$ inducida por f^{-1} es la inversa de $\bar{f}$.

El argumento es análogo para h decreciente.