Topología

Segundo Cuatrimestre 2015

Primer Parcial - 7/10/2015

Nombre y apellido: LU:

---

1. Sea X un espacio topológico. Se define en X la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si x e y pertenecen a la misma componente conexa. Probar que las componentes conexas de $X/_{\sim}$ son unipuntuales.

   Resolución 1 Manera 1: *Sea $C \subseteq X/_{\sim}$ una componente conexa. Considero $p|_{p^{-1}(C)} : p^{-1}(C) \to C$ la restricción de la proyección al cociente $p : X \to X/_{\sim}$. Como ya que C es cerrado y saturado, $p|_{p^{-1}(C)}$ resulta cociente. Además, C es conexo y las fibras $p^{-1}(p(x)) = C_x$ son conexas. Por ejercicio 7 de la práctica 3, $p^{-1}(C)$ es conexo. Luego, C no puede tener más de dos puntos.*

   Manera 2: *Sea $C \subseteq X/_{\sim}$ una componente conexa. Supongamos que C más de un elemento. Así, $p^{-1}(C)$ es disconexo y por lo tanto existen abiertos (y cerrados) disjuntos U, V de $\subseteq p^{-1}(C)$ tales que $p^{-1}(C) = U \cup V$. Como $C \subseteq X/_{\sim}$ es cerrado y p continua, $p^{-1}(C)$ es cerrado, y entonces U y V son cerrados de X. Veamos que $\{p(U), p(V)\}$ es una desconexión de C. En primer lugar, $p(U) \cup p(V) = p(U \cup V) = p(p^{-1}(C)) = C$. Además, si existiera $z \in p(U) \cap p(U)$, entonces $z = p(x) = p(y)$ para ciertos $x \in U$, $y \in V$ en la misma componente conexa C_z de X. En ese caso, podríamos construir una desconexión $\{C_z \cap U; (C_z \cap V)\}$ de C_z, lo cual es absurdo. Luego, $p(U) \cap p(U) = \varnothing$. Por último, $p(U)$, $p(V)$ son cerrados de C pues $p^{-1}(p(U)) = U$, $p^{-1}(p(V)) = V$, donde las igualdades se deducen del hecho de que las fibras $p^{-1}(z) = C_z$ son conexas, por lo que están contenidas en U o en V. Concluimos que C es unipuntual.*

2. Probar que si $f : X \to Y$ es propia y suryectiva y X es regular, entonces Y es regular.

3. Sean X_1, X_2, Y espacios topológicos y $p : X_1 \to X_2$ una función continua suryectiva. Sea $\varphi : C(X_2, Y) \to C(X_1, Y)$ la función definida por $\varphi(f)(x) = f(p(x))$. Probar que si X_1 es compacto y X_2 es T_2, entonces φ es subespacio.

4. Un espacio topológico X se dice *compactamente generado* si para todo $F \subseteq X$ vale que F es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado en K para todo $K \subseteq X$ compacto (es decir, las inclusiones de sus compactos $\{\iota_K : K \hookrightarrow X : K \subseteq X \text{ compacto}\}$ son una familia final).

   a) Probar que X es compactamente generado si y sólo si existe $q : Z \to X$ cociente, con Z localmente compacto.

   b) Deducir que si X es compactamente generado e Y es localmente compacto y T_2, entonces $X \times Y$ es compactamente generado.

5. Sea X un espacio topológico que se obtiene del cuadrado $I \times I$, identificando un par de lados opuestos vía un homeomorfismo $h : I \to I$; es decir, $X = I \times I/_{(x,0)\sim(h(x),1)}$. Probar que X es homeomorfo o bien al cilindro o bien a la banda de Möbius.

Resolución 2 *La primera observación clave es que un homemorfismo $I \to I$ es estrictamente monotóno (sale usando conexión). En consecuencia, la estrategia será demostrar que si el homemorfismo es creciente obtenemos el cilindro C y en caso contrario, la banda M.*

Sea $h : I \to I$ un homeomorfismo creciente. Supongamos que identificamos vía los dos lados verticales $\{0\} \times I$, $\{1\} \times I$. Necesitamos una flecha $I \times I/_{(0,t)\sim(1,h(t))} \to C$; para eso vamos a definir un homemorfismo $f : I \times I \to I \times I$ que pase bien a los cocientes. La manera de lograr esto es que f coincida con la identidad en $\{0\} \times I$ y con h en $\{1\} \times I$. En el interior del cuadrado la definimos usando convexidad, es decir:

$$f(s,t) = (s, t(1-s) + h(t)s), \text{ para } s,t \in I.$$

f es continua y biyectiva y por lo tanto resulta un homemorfismo. (Justificación de la biyectividad:

- *inyectiva: $f(s,t) = f(s,t')$ implica $(t-t')(1-s) = (h(t') - h(t))s$. Como h es creciente no puede ser $t < t'$ pues en tal caso la expresión de la izquierda es negativa y la de la derecha positiva.*
- *sobreyectiva: dado $(s,u) \in I \times I$, como $f(s,0) = (s,0)$ y $f(s,1) = (s,1)$, por Bolzano existe $t \in I$ tal que $f(s,t) = (s,u)$.)*

El homeomorfismo buscado es el punteado en el diagrama: La manera más fácil (que se me ocurre al menos) de ver que $\bar{f}$ es homeo es probando que la función $g : C \to I \times I/_{(0,t)\sim(1,h(t))}$ inducida por f^{-1} es la inversa de $\bar{f}$.

El argumento es análogo para h decreciente.