Funciones propias

Ximena Fernández

Definición 1. Una función continua $f : X \to Y$ se dice **cerrada** si para cada $F \subseteq X$ cerrado, se tiene que $f(F) \subseteq Y$ es cerrado.

Definición 2. Una función continua $f : X \to Y$ se dice **cuasipropia** si para cada $K \subseteq Y$ compacto, se tiene que $f^{-1}(K)$ es compacto.

Observación 3. Una función cuasipropia $f : X \to \mathbb{R}^n$ es necesariamente cerrada. Pero si Y no es T_2, puede no serlo. Por ejemplo, la función identidad de un conjunto finito no unipuntual con la topología discreta al mismo conjunto con la topología indiscreta, es cuasipropia pero no es cerrada.

Definición 4. Una función continua $f : X \to Y$ se dice **universalmente cerrada** si para todo espacio topológico Z, la función $id_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ resulta cerrada.

Definición 5. Una función continua $f : X \to Y$ se dice **propia** si para toda $g : Z \to Y$ continua, la aplicación pullback $\bar{f}$ resulta cerrada.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Observación 6. Notar que si $Y = \{*\}$, entonces hay una sola posible función $f : X \to Y$, que resulta propia si y sólo si para cada espacio topológico Z, la proyección sobre Z, $p_Z : Z \times X \to Z$ es cerrada. Esto puede usarse como definición de compacidad: X es compacto si y sólo si $X \to *$ es propia.

Observación 7. Una función universalmente cerrada es necesariamente cerrada; basta tomar $Z = \{*\}$. Una función propia es universalmente cerrada, y luego cerrada.

Si pedimos que la función $f : X \to Y$ sea cerrada, las definiciones anteriores resultan equivalentes:

Teorema 8. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Son equivalentes:*

1. *f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.*
2. *f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.*
3. *Para todo Z espacio topológico, $id_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ es cerrada.*
4. *f es propia.*

Cada una de estas propiedades parece más fuerte y general que la anterior, en el sentido de las implicaciones para arriba tiene una prueba sencilla.

Demostración. $(2 \implies 1)$ Dado $y \in Y$, como $\{y\}$ es compacto, tenemos que $f^{-1}(\{y\})$ compacto.

$(1 \implies 2)$
Manera 1: Sea $K \subseteq Y$ compacto, y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de $f^{-1}(K)$ por abiertos de X. Para cada $y \in K$, $f^{-1}(\{y\})$ es compacto. Puedo elegir $\mathcal{F}_y \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}_y} U =: V^y$. El conjunto $W^y := X \setminus f(Y \setminus V^y)$ es abierto, pues f es cerrada, y además contine a y. Como K es compacto, puedo tomar $S \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{y \in S} W^y$. Veamos que la familia finita $\{U : U \in \mathcal{F}_y, y \in S\}$ cubre a $f^{-1}(K)$. En efecto, si $x \in f^{-1}(K)$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(x) \in W^y = X \setminus f(X \setminus V^y)$, y como $f(x) \notin f(X \setminus V^y)$, sigue que $x \in V^y$.

Manera 2: Sea $K \subseteq Y$ compacto, y sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ una colección de cerrados de $f^{-1}(K)$ con la propiedad de intersección finita. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la familia $\mathcal{F}$ es cerrada por tomar intersecciones finitas. Como f es cerrada, $\{f(F_\alpha)\}$ es una familia de cerrados de K, que también goza de la propiedad de intersección finita. En efecto, $\varnothing \neq f(\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n f(F_{\alpha_i})$. Por compacidad de K, $\bigcap_\alpha f(F_\alpha) \neq \varnothing$. Si $y \in \bigcap_\alpha f(F_\alpha)$, entonces $\{F_\alpha \cap f^{-1}(\{y\})\}$ es una colección de cerrados de $f^{-1}(\{y\})$ que tiene la propiedad de intersección finita. Como $f^{-1}(\{y\})$ es compacto, $\varnothing \neq \bigcap_\alpha F_\alpha \cap f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcap_\alpha F_\alpha$.

$(3 \implies 2)$ Sea $K \subseteq Y$ compacto. Debemos ver que $f^{-1}(K)$ es compacto. Equivalentemente, veremos que para todo Z espacio topológico, la proyección $p_Z : Z \times f^{-1}(K) \to Z$ es cerrada. Sea entonces Z un espacio topológico cualquiera. Consideramos la función cerrada $id_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$. Restringiendo el codominio a $Z \times K$ (para lo cual también debemos restringir el dominio a $Z \times f^{-1}(K)$), obtenemos una función también cerrada $id_Z \times f|_{f^{-1}(K)} : Z \times f^{-1}(K) \to Z \times K$ (chequear, sale a mano). Componiendo con la proyección $p_Z : Z \times K \to Z$, que es cerrada porque K es compacto, concluimos que es cerrada la función $p_Z : Z \times f^{-1}(K) \to Z$.

$(1 \implies 3)$ Sea $F \subseteq Z \times X$ cerrado. Veamos $(id_Z \times f(F))^c$ es abierto. Sea $(z_0, y_0) \notin (id_Z \times f)(F)$. Construiremos abiertos $U \ni z_0$, $V \ni y_0$ tales que $(id_Z \times f)(F) \cap (U \times V) = \varnothing$.

En principio, $\{z_0\} \times f^{-1}(y_0) \subseteq F^c$. Como $f^{-1}(y_0)$ es compacto, el Lema del Tubo nos provee de abiertos $W \subseteq Z$, $V \subseteq X$ tales que

$$\{z_0\} \times f^{-1}(\{y_0\}) \subseteq W \times V \subseteq F^c.$$

Construimos

$$U := Y \setminus f(X \setminus W).$$

Veamos $(z_0, y_0) \in U \times V \subseteq (id_Z \times f(F))^c$. Como $W \times V \subseteq F^c$, entonces $F \subseteq (W \times V)^c = (W^c \times X) \cup (Z \times V^c)$. Aplicando $id_Z \times f$, se tiene que $(id_Z \times f)(F) \subseteq (W^c \times Y) \cup (Z \times f(V^c))$, que es cerrado pues f lo es. Finalmente, $((W^c \times Y) \cup (Z \times f(V^c)))^c = f(U^c)^c \times V \subseteq (f \times 1_Z(F))^c$. Y como $f^{-1}(\{y_0\}) \subseteq W$, entonces $f^{-1}(\{y_0\}) \cap W^c = \varnothing$. Luego, $y \notin f(W^c)$.

$(4 \implies 3)$ Es el pullback de f por la función proyección $p_Y : Z \times Y \to Y$.

$(3 \implies 4)$ Sea Z espacio topológico, $g : Z \to Y$ función continua. Queremos ver que $\bar{f}$ es cerrada. Notar que $g = p_Y \circ (id_Z, g)$. Entonces el pullback de f por g

se puede descomponer como la composición de dos pullbacks.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"'] & Z \times X \arrow[r] \arrow[d, "id_Z \times f"] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "(id_Z, g)"'] & Z \times Y \arrow[r, "p_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$id_Z \times f$ es cerrada por hipótesis. (id_Z, g) es subespacio. El pullback de una función cerrada por una función subespacio queda cerrada (chequear). Luego, $\bar{f}$ es cerrada.

$(1 \implies 4)$ Consideremos la construcción usual del pullback $P = \{(z,x) \in Z \times X : g(z) = f(x)\}$, y $\bar{f} = p_Z$. Sea $F \subseteq P$ cerrado, dado por $F = \tilde{F} \cap P$ con $\tilde{F} \subseteq Z \times X$ cerrado. Quiero ver que $p_Z(F) \subseteq Z$ es cerrado. Sea $z_0 \in p_Z(F)$. Basta hallar un abierto U_0 de Z tal que $z_0 \in U_0 \subseteq p(F)^c$.

Sabemos que no existe un punto $(z_0, x) \in \tilde{F}$ tal que $g(z_0) = f(x)$. Dicho en otros términos, $\{z_0\} \times f^{-1}(g(z_0)) \in \tilde{F}^c$ El Lema del Tubo nuevamente nos salva, brindándonos abiertos $U \subseteq Z$, $V \subseteq X$ tales que $\{z_0\} \times f^{-1}(g(z_0)) \in U \times V \subseteq \tilde{F}^c$.

¿Valdrá que $U \subseteq p_Z(F)^c$? Quizás hay que achicarlo un poco más. Veamos. Sea $(z,x) \in F$. Lo ideal sería que $p_Z(z,x) \notin U$, cosa que no tiene por qué pasar. Supongamos que $p_Z(z,x) = z \in U$. Por un lado, como $(z,x) \in \tilde{F}$, entonces $x \notin V$ y $f(x) \in f(X \setminus V)$. Por otro lado, como $(z,x) \in P$, se tiene que $g(z) = f(x)$. Sigue que $g(z) \in f(X \smallsetminus V)$ y, luego, $g(z) \notin Y \smallsetminus f(X \smallsetminus V) =: W$. En otras palabras, $z \notin g^{-1}(W)$. Notar que $g^{-1}(W)$ que es un entorno abierto de z_0. En efecto, como $f(g(z_0)) \subseteq V$, resulta que $g(z_0) \notin f(X \smallsetminus V)$.

El razonamiento anterior prueba que $z_0 \in U_0 := U \cap g^{-1}(W) \subseteq p_Z(F)^c$.

□

En muchos casos es fácil verificar que una función es cuasipropia. Si el codominio es bueno, esto implica automáticamente que la función es propia.

Teorema 9. *Una función cuasipropia $f : X \to Y$ resulta cerrada si Y es localmente compacto y T_2.*

Demostración. Supongamos que f es cuasipropia y que Y es localmente compacto y T_2. Si $F \subseteq X$ cerrado, entonces $f|_F$ es también cuasipropia; y $f(F) = f|_F(F)$. Luego, basta ver que $f(X)$ es cerrado en Y.

Supongamos que Y es localmente compacto. Sea $y \in \overline{f(X)}$. Sea K un entorno compacto de y. Entonces $f^{-1}(K)$ es un compacto no vacío, y $f|_{f^{-1}(K)}$ es cerrada. Luego, $f(f^{-1}(K)) = f(X) \cap K$ es cerrado, e y es punto límite de este conjunto. En conclusión, $y \in f(X) \cap Y \subseteq f(X)$.

□