Ejercicios del 16/09/2015

Ejercicio. *Sean X e Y localmente compactos y T_2, $f : X \to Y$ continua.*

a) Probar que si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto, entonces f es propia.

b) Probar que f es propia si y sólo si admite una extensión continua $f^* : X^* \to Y^*$ con $f^*(\infty) = \infty$.

Resolución. a) Alcanza con ver que f es cerrada. Sea $F \subseteq X$ cerrado, $(f(x_\alpha))$ red en $f(F)$ convergente a $y \in Y$. Como Y localmente compacto, existe $K \ni y$ entorno compacto. Sea $U \subseteq K$ abierto con $y \in U$. Como $f(x_\alpha) \to y$, a partir de un α_0, $f(x_\alpha) \in U \subseteq K$. Por hipótesis, $f^{-1}(K)$ compacto. La red $(x_\alpha) \subseteq F$ $(\alpha \geq \alpha_0)$ está contenida en $f^{-1}(K)$ y por lo tanto tiene subred convergente a $x \in F$ (F es cerrado). Por continuidad, la imagen por f de esa red converge a $f(x)$ por un lado y a y por otro, por ser subred de la original. Como Y es T_2, $f(x) = y$ y así $y \in f(F)$.

b) $\Rightarrow$) Veamos que para todo $U \subseteq Y^*$ abierto básico $f^{*-1}(U)$ es abierto. Si $U \subseteq Y$ abierto es evidente. Supongamos $U = Y^* \setminus K$ con $K \subseteq Y$ compacto. Entonces $f^{*-1}(U) = f^{*-1}(Y) \setminus f^{*-1}(K) = X^* \setminus f^{-1}(K)$. Como f es propia, $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto y luego $f^{*-1}(U) \subseteq X^*$ es abierto.

$\Leftarrow$) Sea $K \subseteq Y$ compacto. Entonces $Y^* \setminus K \subseteq Y^*$ es abierto. Como f^* es continua, $f^{*-1}(Y^* \setminus K) = X^* \setminus f^{*-1}(K) = X^* \setminus f^{-1}(K)$ es abierto y contiene a ∞. Por lo tanto, existe un compacto $C \subseteq X$ con $\infty \in X^* \setminus C \subseteq X^* \setminus f^{-1}(K)$, con lo cual $f^{-1}(K) \subseteq C$. Como además $f^{-1}(K)$ es cerrado ($K \subseteq Y$ compacto, Y T_2), resulta compacto.

Ejercicio. *Sean G grupo topológico, $H \leq G$ un subgrupo compacto.*

a) Probar que la proyección $p : G \to G/H$ es cerrada.

b) Probar que si además G/H es compacto entonces G es compacto.

Resolución. a) Sea $F \subseteq G$ cerrado; $p^{-1}(p(F)) = HF$. Alcanza con ver que $HF \subseteq G$ es cerrado. Una manera pedestre es tomar $(h_\alpha f_\alpha)$ red convergente a x, extraer subred convergente a $h \in H$ de (h_α) y entonces la subred correspondiente de (f_α) converge a $h^{-1}x \in F$. Luego, $x = h \cdot h^{-1}x \in HF$, como teníamos que probar.

b) Es fácil ver que p es propia: si $[g] \in G/H$, $p^{-1}([g]) = gH$ es compacto porque es homeomorfo a H. Como por hipótesis G/H es compacto y $G = p^{-1}(G/H)$, G resulta compacto porque p es propia.