Topología

Segundo Cuatrimestre 2015

Segundo Parcial - 2/12/2015

Nombre y apellido: LU:

---

1. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ punto base. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un subespacio de X abierto arco-conexo tal que $x_0 \in X_n$. Supongamos que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Sean $(i_n)_* : \pi_1(X_n, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $(j_{n,m})_* : \pi_1(X_n, x_0) \to \pi_1(X_m, x_0)$, $n \leq m$, los morfismos inducidos por las inclusiones. Probar que:

   a) Para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha' \in \pi_1(X_n, x_0)$ tales que $(i_n)_*(\alpha') = \alpha$.

   b) Si $\beta \in \pi_1(X_n, x_0)$ e $(i_n)_*(\beta) = 1$, entonces existe $m \geq n$ tal que $(j_{n,m})_*(\beta) = 1$.

   Nota: Los dos incisos implican que $\pi_1(X, x_0)$ es el límite directo de $(\pi_1(X_n, x_0), (j_{n,m})_*)$.

   Resolución.

   a) Sea $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ y tomemos $\gamma : I \to X$ lazo en x_0 tal que $[\gamma] = \alpha$. Como $\gamma(I) \subseteq X$ es compacto y X es una unión creciente de abiertos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(I) \subseteq X_n$. Luego, está bien definida la correstricción $\gamma|^{X_n} : I \to X_n$. Si llamamos α' al elemento que $\gamma|^{X_n}$ determina en $\pi_1(X_n, x_0)$ tenemos $(i_n)_*(\alpha') = [i_n \circ \gamma|^{X_n}] = [\gamma] = \alpha$.

   b) Sea $\beta \in \pi_1(X_n, x_0)$ con $(i_n)_*(\beta) = 1$. Tomemos $\gamma : I \to X_n$ con $[\gamma] = \beta$, de manera que existe una homotopía $H : I \times I \to X$ entre γ y cte_{x_0} relativa a $\{0, 1\}$. Por el mismo argumento del ítem anterior, existe $m \geq n$ tal que $H(I \times I) \subseteq X_m$. Usando la correstricción $H|^{X_m}$ vemos que $(j_{n,m})_*(\beta) = 1$.

2. Sea $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$. Probar que todo homeomorfismo $h : X \to X$ cumple que $h(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

   Resolución. Sea $h : X \to X$ un homeomorfismo. Es claro que induce un homeomorfismo $h : X \setminus (0, 0, 0) \to X \setminus h(0, 0, 0)$. La estrategia es demostrar que $X \setminus (0, 0, 0)$ no es homeomorfo a $X \setminus p$ para $p \in X$, $p \neq (0, 0, 0)$; más concretamente calcularemos los grupos fundamentales de estos espacios y veremos que difieren. Si $p := h(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$, entonces p pertenece a uno o dos planos. Si p pertenece a un sólo plano, $X \setminus p$ se retrae por deformación fuerte a $\mathbb{R}^2 \setminus *$ vía la retracción que manda a 0 la coordenada que corresponde al plano donde está p. Luego, $\pi_1(X \setminus p) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus *) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Si p pertenece a dos planos, podemos retraer a los ejes cada cuadrante del plano en que no se encuentra p (si dicho plano fuera $z = 0$, una manera de retraer el cuadrante C donde $x > 0$ e $y > 0$ sería mandar cada punto $(x, y, 0) \in C$ a la intersección con los ejes de la recta que une a $(x, y, 0)$ con el punto $(-1, -1, 0)$). El espacio resultante se retrae por deformación fuerte a una unión de dos $\mathbb{S}^1$ centrados en p, cada uno contenido en un plano. Usando Van Kampen se ve que $\pi_1(X \setminus p) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Finalmente, nos resta calcular el grupo fundamental de $X \setminus (0, 0, 0)$. Este espacio se retrae por deformación fuerte a una unión de tres $\mathbb{S}^1$ centrados en el origen, cada uno en contenido en un plano. Aplicando Van Kampen (por ejemplo, podemos tomar dos abiertos que provengan de sacar un polo), llegamos a $\pi_1(X \setminus (0, 0, 0)) = *_{i=1}^{7} \mathbb{Z}$.

   Como $\pi_1(X \setminus p) \neq \pi_1(X \setminus (0, 0, 0))$ para $p \neq (0, 0, 0)$, debe ser $h(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

3. Sean X, Y espacios topológicos arcoconexos, localmente arcoconexos y semilocalmente simplemente conexos. Sean $p : \tilde{X} \to X$, $q : \tilde{Y} \to Y$ los revestimientos universales de X e Y respectivamente. Sea $f : X \to Y$ una función continua.

   a) Probar que existe una función continua $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ que hace al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

   b) Supongamos que f es inyectiva. Probar que $\tilde{f}$ es inyectiva si y sólo si $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ es monomorfismo.

Resolución. Llamamos $p : \tilde{X} \to X$ y $q : \tilde{Y} \to Y$ a los revestimientos.

a) Es levantar $f \circ p$.

b) $\Rightarrow$) Supongamos que $f_*[\gamma] = 1 \in \pi_1(Y, f(x))$. Luego, todo levantado del lazo $f\gamma$ es un lazo en $\tilde{Y}$ (porque $f\gamma$ es homotópicamente trivial). Si $\tilde{\gamma}$ es el levantado de γ desde $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, por conmutatividad del diagrama $f\gamma = f \circ p\tilde{\gamma} = q \circ \tilde{f}\tilde{\gamma}$, con lo cual $\tilde{f}\tilde{\gamma}$ es el levantado de $f\gamma$ desde $\tilde{f}(\tilde{x})$. En particular, $\tilde{f}\tilde{\gamma}(0) = \tilde{f}\tilde{\gamma}(1)$ y como $\tilde{f}$ es inyectiva esto muestra que $\tilde{\gamma}$ es un lazo en $\tilde{X}$. Pero $\tilde{X}$ es simplemente conexo y luego $1 = p_*[\tilde{\gamma}] = [\gamma]$.
$\Leftarrow$) La idea es parecida a la implicación anterior. Supongamos $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b)$. De la conmutatividad del diagrama y la inyectividad de f deducimos $p(a) = p(b)$. Luego, si tomamos un camino α entre a y b resulta que $p\alpha$ define un lazo en X. Así, $f_*[p\alpha] = [q\tilde{f}\alpha] = q_*[\tilde{f}\alpha]$, y como Y es simplemente conexo y f_* un monomorfismo, $[p\alpha] = 1$. Pero entonces α es un levantado del lazo homotópicamente trivial $p\alpha$ y en consecuencia debe ser un lazo. En particular, $a = b$ como queríamos probar.

4. Sea X un espacio topológico localmente arcoconexo y arcoconexo. Sea $p : E \to X \times I$ un revestimiento arcoconexo. Para cada $t \in I$, sea $E_t = p^{-1}(X \times \{t\})$, y sea $p_t = p|_{E_t} : E_t \to X \times \{t\} = X$ (notar que p_t es revestimiento).

   a) Sean $x_0 \in X$, $\alpha : I \to X$ un camino que empieza en x_0 y $e_0 \in p^{-1}(x_0, 0)$. Consideremos $\eta : I \to X \times I$ dado por $\eta(t) = (x_0, t)$ y definamos $e_1 := \tilde{\eta}^{e_0}(1)$. Probar que los levantados de α por p_0 y p_1 desde e_0 y e_1 respectivamente son libremente homotópicos (es decir, la homotopía no necesariamente fija los extremos).

   b) Demostrar que existe un homeomorfismo $h : E_0 \to E_1$ tal que $p_1 \circ h = p_0$.

Resolución.

a) Llamemos α_0 y α_1 a los levantados desde e_0 y e_1 de α por p_0 y p_1 respectivamente. Consideramos la homotopía $H = \alpha \times I : I \times I \to X \times I$ entre $\alpha \times 0$ y $\alpha \times 1$. Por levantamiento de homotopías (para el revestimiento p), existe una única función continua $\tilde{H} : I \times I \to E$ tal que $p\tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0,0) = e_0$. Veamos que $\tilde{H} : \alpha_0 \simeq \alpha_1$. De $p\tilde{H}(-, 0) = \alpha \times 0$ y $\tilde{H}(0,0) = e_0$, se deduce por unicidad del levantamiento de caminos que $\tilde{H}(-, 0) = \alpha_0$. Mirando la homotopía en el otro sentido, descubrimos que $p\tilde{H}(0, -) = \eta$, de manera que $\tilde{H}(0, -) = \tilde{\eta}^{e_0}$ (pues además $\tilde{H}(0, -)$ es un camino que empieza en e_0). Esto nos permite concluir que $\tilde{H}(0, 1) = e_1$ y como claramente $p\tilde{H}(-, 1) = \alpha \times 1$, resulta $\tilde{H}(-, 1) = \alpha_1$.

b) Por el lema del levantamiento, para mostrar que existe un homeomorfismo $h : E_0 \to E_1$ con $h(e_0) = e_1$ alcanza con probar que $Fix(e_0) = Fix(e_1)$ (hay una sutileza: el lema pide como hipótesis que tanto E_0 como E_1 sean arcoconexos. Lo son, pero podemos asumir que son arcoconexos y repetir el argumento para cada componente). Chequeemos la condición de los $Fixes$. Sea $\alpha \in Fix(e_0) = (p_0)_*(\pi_1(E_0, e_0))$. Por el ítem anterior sabemos que los levantados α_0 y α_1 son funciones homotópicas en E vía $\tilde{H}$. Para comprobar que $\alpha \in Fix(e_1)$, alcanza con ver que α_1 es un lazo. Pero $\tilde{H}(0, -)$ y $\tilde{H}(1, -)$ coinciden con $\tilde{\eta}^{e_0}$ y en particular $\alpha_1(0) = \tilde{H}(0, 1) = e_1 = \tilde{H}(1, 1) = \alpha_1(1)$. La otra contención es análoga.

5. Calcular la homología de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}_{>1}$.

Resolución. El primer impulso es usar Mayer-Vietoris con dos abiertos que se obtienen de sacar un punto a cada esfera. Si bien la unión de tales abiertos no cubre todo el espacio, es un primer paso en la solución del problema.

Supongamos $n \geq m$ y llamemos N_n, S_n, N_m, S_m a los polos norte y sur de las esferas de dimensión n y m respectivamente. Si $U = \mathbb{S}_n \setminus N_n \times \mathbb{S}^m$ y $V = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \setminus N_m$, como una esfera de dimensión k menos un punto es homeomorfa a $\mathbb{R}^k$, resulta $U \cap V \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \simeq *$, $U \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^m$, $V \equiv \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{S}^n$ y $U \cup V = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \setminus (N_n, N_m)$. Una aplicación inmediata de Mayer-Vietoris (versión reducida para evitar dificultades en el caso $m = 1$ o $n = 1$) muestra que

$$H_k(U \cup V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, n, m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para $n \neq m$ y

$$H_k(U \cup V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } k = n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

si $n = m$.

Nos falta un punto para cubrir el producto $X := \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$. Podemos tomar como uno de los abiertos a $W_1 := U \cup V$ y el otro $W_2 := \mathbb{S}^n \setminus S_n \times \mathbb{S}^m \setminus S_m$. Es claro que $W_1 \cap W_2 = W_2 \setminus (N_n, N_m) \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus * \simeq \mathbb{S}^{n+m-1}$ y que $W_2 \simeq *$. Como $m > 1$, por Mayer-Vietoris tenemos

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, n, m, n + m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

si $n \neq m$ y

$$H_k(U \cup V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 2n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } k = n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

si $n = m$.