Topología

Segundo Cuatrimestre 2015

Segundo Parcial - 2/11/2015

Nombre y apellido: LU:

---

1 Moebius no se retrae a su borde.

1 $C(I, X)$ es arcoconexo si y sólo si X arcoconexo.

1 Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ punto base. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un subespacio de X arco-conexo tal que $x_0 \in X_n$. Supongamos que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ y que para todo subespacio compacto $K \subseteq X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq X_n$ (ejemplo: tomar X_n abiertos). Sean $(i_n)_* : \pi_1(X_n, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $(j_{n,m})_* : \pi_1(X_n, x_0) \to \pi_1(X_m, x_0)$, $n \leq m$, los morfismos inducidos por las inclusiones. Probar que:

a) Para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha' \in \pi_1(X_n, x_0)$ tal que $(i_n)_*(\alpha) = \alpha'$.

b) Si $\beta \in \pi_1(X_n, x_0)$ e $(i_n)_*(\beta) = 1$, entonces existe $m \geq n$ tal que $(j_{n,m})_*(\beta) = 1$.

(Los dos incisos implican que $\pi_1(X, x_0)$ es el límite directo de $\pi_(X_n, x_0)$, $(j_{n,m})_*$.)

Si $(j_{n,n+1})_*$ son monomorfismos para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(i_n)_*$ es monomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\pi_1(X, x_0)$ es la unión de los subgrupos $(i_n)_*(\pi_1(X_n, x_0))$.

2 Sea $\{W\} \cup \{V_i : i \in I\}$ un cubrimiento de X por abiertos arcoconexos con las siguientes propiedades:

- W es un subespacio propio de V_i para todo $i \in I$.
- Para cada $i \neq j \in I$, $V_i \cap V_j = W$
- W es simplemente conexo.
- $x_0 \in W$

Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $*_{i \in I} \pi_1(V_i, x_0)$ (vía el morfismo inducido por los morfismos $\phi_i : \pi_1(V_i, x_0) \to \pi_1(X)$ inducidos por las funciones inclusión).

3 Sea B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. Sea E un revestimiento y $\tilde{B}$ el revestimento universal. Probar que $E \times_B \tilde{B}$ homeomorfo a $E_b \times \tilde{B}$, donde E_b es la fibra en E sobre un punto b de B.

4 Sea $p : E \to B$ revestimiento, con E arcoconexo y localmente arcoconexo. Probar que p es normal si y sólo si dao un lazo γ en B, todos los levantados de γ son lazos o ninguno lo es.

5 X union creciente de espacios, homología es limite directo

5 Calcular la homología de $S^n \times S^m$.