

Topología

Segundo Cuatrimestre 2015

Ejercicio 2: Topologías iniciales y finales

- I) Sean X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia en X y $\sim'$ una relación de equivalencia en $X/\sim$. Pruebe que el espacio $(X/\sim)/\sim'$ es homeomorfo a $X/\sim''$, donde $x \sim'' y$ si y sólo si $q(x) \sim' q(y)$, con $q : X \rightarrow X/\sim$ la proyección al cociente. Deduzca que el toro T es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times I / [(z,0) \sim (z,1)]$, y que la botella de Klein K es homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times I / [(z,0) \sim (\bar{z},1)]$.
- II) Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos, y $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ funciones continuas. Consideramos $X = \{(x_n) \in \prod X_n : f_n(x_n) = x_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$, y $p_n : X \rightarrow X_n$ las funciones definidas por $p_n((x_k)) = x_n$. Le damos a X la topología inicial inducida por $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. X es el *límite inverso* o *límite proyectivo* de $\{X_n\}$, y se denota $X = \varprojlim X_n$.
- a) Pruebe la siguiente propiedad universal: dados Y espacio topológico y $g_n : Y \rightarrow X_n$ familia de funciones continuas tal que $f_n g_n = g_{n-1}$, existe una única $g : Y \rightarrow X$ función continua tal que $p_n g = g_n$.
- b) Sea $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección a las primeras $n - 1$ coordenadas. Pruebe que $\varprojlim \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\omega$.