Topologías en $C(X,Y)$ para Y e.m. (o metrizable)

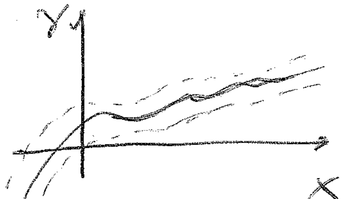
Topología natural: $\tau_{\text{conv. punt.}}$: $f_\alpha \to f \iff \forall x\in X,\ f_\alpha(x) \to f(x)$. Es la topología sube de $C(X,Y) \subseteq Y^X = \prod_{x\in X} Y$.

Desventajas: • $C(X,Y)$ no es cerrado ($x^n \to \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$)

• No aprovecha Y métrico.

• No usa la topología de X (sólo el cardinal)

Sabemos de Avanzado que si $f_n \rightrightarrows f$, $(f_n)_n$ continuas, entonces f es continua.



Si d acotada (si no la reemplazo por $\bar d$), defino $\rho(f,g) := \{\sup_{x\in X} d(f(x),g(x))\}$, $f,g \in C(X,Y)$. Esto es una métrica en $C(X,Y)$ con la cual resulta cerrado.

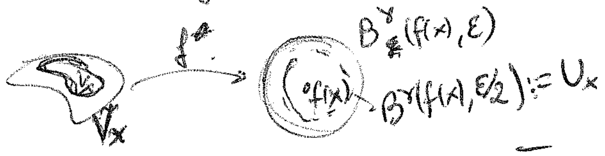
Más aún: si X es métrico, $f_n|_C \rightrightarrows f|_C$ $\forall C\subseteq X$ compacto, entonces f resulta continua. En general, consideramos la topología de la convergencia compacta dada por la base $\{B_K(f,\varepsilon)\}_{f\in C(X,Y),\ \varepsilon>0}$, $B_K(f,\varepsilon) = \{g\in C(X,Y) : \sup_{x\in K} d(f(x),g(x)) < \varepsilon\}$

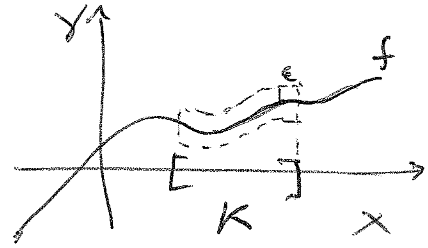
Obs: Si X es compactamente generado, ent $C(X,Y)$ es cerrado.

Dem: $U \subseteq Y$ ab $\Rightarrow f^{-1}(U)\cap C = f|_C^{-1}(U)$ ab en C por hipótesis. ▨

Teo (Ej. pca 5). Sea X e.t., (Y,d) métrico. Ent, en $C(X,Y)$ las topologías de la convergencia compacta y la compacto abierta coinciden.

Dem: conv. comp $\subseteq$ comp-abierta. Debo ver $B_K(f,\varepsilon)$ es abierta en la compacto-abierta. Alcanza con ver que $\exists$ W ab de τ_{c-a} con $f\in W\subseteq B_K(f,\varepsilon)$.
$(g\in B_K(f,\varepsilon) \Rightarrow g\in B_K(g,\varepsilon-\delta)\subseteq B_K(f,\varepsilon))$.





Si $g\in W(\overline{V_x}\cap K, U_x)$: Sea $y\in \overline{V_x}\cap K$.

Ent, $d(g(y),f(y)) \le d(g(y),f(x)) + d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

$K\subseteq \bigcup_{x\in K} V_x$; como K compacto, $\exists$ subcub. finito $V_{x_1},\dots,V_{x_n}$.

Considero $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(\overline{V_{x_i}}\cap K, U_{x_i})$. Sea $g \in W$, $x\in C$; $\exists$ i tq $x\in V_{x_i}\cap K \subseteq \overline{V_{x_i}}\cap K$.
$f(x), g(x) \in U_{x_i}$, de forma que $d(f(x),g(x)) < \varepsilon$. Luego $\sup_{x\in K}\{d(f(x),g(x))\} \le \varepsilon$. ▨

Rec: $A \subseteq C(X,Y)$ equicontinuo si $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ tq $d(x,x_0)<\varepsilon \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$
$\forall x_0\in X$, $\exists U_0 \ni x_0$ ab tq $x\in U \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

Teorema (Ascoli): Sea X localmente compacto y T_2, (Y,d) e.m. Considero $C(X,Y)$ con la c-a. Sea $A \subseteq C(X,Y)$; A es relativamente compacto $\Longleftrightarrow$ es equicontinuo y $A_x := \{f(x) : f \in A\}$ es rel. compacto $\forall x$.

Dem: $\Rightarrow$) Paso 1. $A \subseteq C(X,Y)$ hereda la topología de la convergencia puntual.

Sea $f \in A$, $f \in B_K(f,\varepsilon) = \{g \in C(X,Y) : \sup_{x\in K} d(f(x),g(x)) < \varepsilon\}$

$\forall x \in K$, $\exists\, U_x \ni x$ tq $\forall y \in U_x$, $g \in A$, $d(g(y),g(x)) < \varepsilon/3$.

Cubro K con finitos abiertos $U_1,\dots,U_n$ y elijo $x_i \in U_i$, $1 \le i \le n$. Entonces, considero:

$$S := \{g \in C(X,Y) : d(g(x_i),f(x_i)) < \varepsilon/3 \ \forall 1\le i\le n\} \text{ (ab. en top. producto)}$$

Sea $g \in A \cap S$; si $x \in K$, sea i tq $U_i \ni x$. Así, $d(g(x),g(x_i)) < \varepsilon/3$, $d(g(x_i),f(x_i)) < \varepsilon/3$, $d(f(x_i),f(x)) < \varepsilon/3$ y por lo tanto $d(g(x),f(x)) < \varepsilon$.

Paso 2. (lema): Si $B \subseteq Y^X$ es equicontinuo $\Rightarrow \overline{B} \subseteq Y^X$ equicontinuo.

Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, $U \ni x_0$ tq $d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ $\forall f \in B$, $x \in U$.

Sean $g \in \overline{B}$, $x \in U$. $V_x \subseteq Y^X$, $V_x := \{h \in Y^X : d(h(x),g(x)) < \varepsilon,\ d(h(x_0),g(x_0)) < \varepsilon\}$.

$\Rightarrow$ como $g \in \overline{B}$, $\exists\, f \in B \cap V_x$. Luego, $d(g(x),g(x_0)) < 3\varepsilon$.

Paso 3: $A \subseteq \overline{A}^{C(X,Y)} \subseteq \overline{A}^{Y^X}$. Como $\overline{A}^{Y^X}$ tiene la misma topo que la c-a, luego $\overline{A}^{C(X,Y)} = \overline{A}^{Y^X}$.

Por otro lado, sea $C_x := \overline{A_x} \subseteq Y$; $A \subseteq \overset{\overline{\prod_{x\in X} A_x}}{\underbrace{\prod_{x\in X} C_x}_{\text{compacto}}} \subseteq Y^X$.

$\overline{A}^{C(X,Y)} \subseteq \prod_{x\in X} C_x$ es compacto (cerrado).

Además, $\overline{A}^{C(X,Y)}$ es equicontinuo y en particular, todo $f \in A$ es continua.

$\Leftarrow$) $C(X,Y) \supseteq A$, $\overline{A}$ compacto. Como Y loc. comp y T_2, $\xi : C(X,Y) \times X \to Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$ es continua; Sea $x \in X$. $\xi(\overline{A},x) \subseteq Y$ es compacto.

Pero $A_x = \xi(A,x) \subseteq \xi(\overline{A},x) \subseteq Y$.

Equicontinuidad: Sean $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Para cada $f \in \overline{A}$, $\exists\, U_f \ni x_0 \subseteq X$ tq $f(\overline{U_f}) \subseteq B^Y(f(x_0),\varepsilon)$. Por otro lado, $f \in B_{\overline{U_f}}(f,\varepsilon/)$. Luego, $\exists$ finitos $f_1,\dots,f_n$ tales que $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\overline{U_{f_i}}}(f_i,\varepsilon/\ )$. Considero $U := \bigcap_{i=1}^n U_{f_i}$. Si $x \in U$, $f \in \overline{A}$, $f \in B_{\overline{U_{f_i}}}(f_i,\varepsilon/)$

$$d(f(x),f(x_0)) \le \underbrace{d(f(x),f_i(x))}_{<\varepsilon/} + \underbrace{d(f_i(x),f_i(x_0))}_{<\varepsilon/} + \underbrace{d(f_i(x_0),f(x_0))}_{<\varepsilon/} < \varepsilon.$$

$\blacksquare$