

## Práctica 4

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  y  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ . Decidir en cada caso si corresponde  $\subseteq$ ,  $\supseteq$  ó  $=$  y probarlo.

$$\begin{array}{llll}
 (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\
 (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
 (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\
 (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
 (v) & f(\mathbb{C}A) & \dots\dots & \mathbb{C}(f(A)) \\
 (vi) & f^{-1}(\mathbb{C}X) & \dots\dots & \mathbb{C}(f^{-1}(X))
 \end{array}$$

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x) = f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Demostrar que  $f$  es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre  $\mathbb{Q}$  son la misma función.

3. Hallar todos los puntos donde la función  $f$  es continua, siendo

(a)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

4. Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Demostrar que existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = c$ . *Sugerencia.* Considerar la función  $x - f(x)$ .

5. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que son equivalentes:

- (a)  $f$  es continua (en todo  $\mathbb{R}$ ).
- (b)  $f^{-1}(O)$  es abierto para todo  $O \subseteq \mathbb{R}$  abierto.
- (c)  $f^{-1}(F)$  es cerrado para todo  $F \subseteq \mathbb{R}$  cerrado.

6. Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y sea  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in K$ . Probar que existe  $\alpha > 0$  tal que  $f(x) > \alpha$  para todo  $x \in K$ .

7. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = |x|$ .

- (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = x^2$ .
- (c)  $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \sqrt{x}$ , con  $r = 0$  y con  $r > 0$ .
- (d)  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ .
- (e)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
- (f)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = d(x, S)$ , donde  $S \subseteq \mathbb{R}$ .

8. Sea  $S \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto arbitrario y sean  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  funciones uniformemente continuas.

- (a) Probar que  $f + g$  es uniformemente continua.
- (b) Mostrar con un ejemplo que  $f \cdot g$  no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones  $f$  ó  $g$  es acotada.
- (c) Probar que si  $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$  es otra función uniformemente continua entonces  $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}$  también lo es.

9. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es uniformemente continua en los intervalos  $[a, b]$  y  $[b, c]$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $[a, c]$ .

¿Es cierto que si  $f$  es una función uniformemente continua sobre un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  y también sobre un conjunto  $B \subseteq \mathbb{R}$ , entonces lo es en  $A \cup B$ ?

10. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  y  $\alpha$  números reales. Se dice que  $f$  es localmente Lipschitz de orden  $\alpha$  en el punto  $x_0$  si existen  $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

$M$  se llama la constante de Lipschitz de  $f$ . Cuando el orden  $\alpha = 1$  decimos, simplemente, que  $f$  es Lipschitz.

- (a) Demostrar que si  $f$  es localmente Lipschitz de orden  $\alpha > 0$  en  $x_0$  entonces  $f$  es continua en  $x_0$ .
- (b) Mostrar que si  $f$  es localmente Lipschitz de orden  $\alpha > 1$  en  $x_0$ , entonces es derivable en  $x_0$  y  $f'(x_0) = 0$ .

11. Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Demostrar que  $f$  no es Lipschitz pero sin embargo  $f$  es uniformemente continua (en particular “unif. cont.  $\nRightarrow$  Lipschitz”).

12. Sea  $S \subset \mathbb{R}$  y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitz con constante igual a  $M < 1$ . Demostrar que si  $S$  es cerrado, y  $f(S) \subseteq S$  entonces existe  $y \in S$  tal que  $f(y) = y$ , en otras palabras,  $f$  tiene un punto fijo.

*Sugerencia.* Considerar la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $S$  construída recursivamente así:  $x_1 \in S$  cualquiera, si  $x_n$  está definido se toma  $x_{n+1} := f(x_n)$ , en otras palabras,  $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$ . Demostrar que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy; tomar  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone  $S$  cerrado.

13. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$ . Demostrar que  $f$  es Lipschitz con  $M = 1$  pero que  $f$  no tiene puntos fijos.

*Sugerencia.* Considerar la función  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = |x - f(x)|$ .

14. Considérese el conjunto  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ . Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir:  $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Se define  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  de la manera siguiente:

$$f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

donde  $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$ .

Demostrar que:

- (a)  $f$  está bien definida.
  - (b)  $f$  es una función monótona creciente.
  - (c)  $f$  es discontinua en todo punto del conjunto  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ ; más aún: para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $f(x_{n+}) - f(x_{n-}) = \frac{1}{2^n} > 0$ .
  - (d)  $f$  es continua a izquierda en todo  $x \in (0, 1)$ ; es decir, para todo  $x \in (0, 1)$  vale que  $f(x-) = f(x)$ .
  - (e)  $f$  es continua en todo punto del conjunto  $(0, 1) - \mathbb{Q}$ .
15. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en el conjunto  $S \subset \mathbb{R}$ :
- (a)  $f_n(x) = x^n$ ,  $S = (-1, 1]$ .
  - (b)  $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$ ,  $S = (1, +\infty)$ .
  - (c)  $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ ,  $S = [0, 1]$ .
16. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 15(a) converge uniformemente en  $T = (0, 1/2)$ , pero en  $S = (-1, 1]$  converge puntualmente a una función que no es continua.
- (b) Probar que la sucesión del ejercicio 15(b) converge uniformemente en  $T = [2, 5]$ .
17. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:
- (a)  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ , sobre todo  $\mathbb{R}$ .
  - (b)  $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$ , sobre todo  $\mathbb{R}$ .
  - (c)  $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$ , sobre todo  $\mathbb{R}$ .
  - (d)  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}, b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$ , sobre  $[0, 1]$ .

18. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en  $\mathbb{R}$  a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

19. Sea  $S \subset \mathbb{R}$  y sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$  que converge uniformemente a una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que si  $f_n$  es acotada para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces vale:

- (a)  $f$  es acotada.
- (b) Existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|f_n(x)| \leq M$  para todo  $x \in S$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  (en otras palabras,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente acotada).

20. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n.$$

- (a) Probar que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a la función cero en el intervalo  $[0, 1]$ .
- (b) Verificar que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  pero que el límite no puede ‘pasar adentro de la integral’. Es decir, ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$