Práctica 3

1. *Una función* $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* norma *en* $\mathbb{R}^n$ *si se cumple que:*

   - $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, ..., 0)$.
   - $N(\alpha v) =\mid \alpha \mid N(v)$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   Sean $\| (x_1, ..., x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$ y $\| (x_1, ..., x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$.

   Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

2. *Una función* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* distancia *en* $\mathbb{R}^n$ *si se cumple:*

   - $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.
   - $d(v, w) = d(w, v)$, *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.
   - $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$, *para todo* $v, w, u \in \mathbb{R}^n$.

   Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

3. Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los siguientes conjuntos :

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$ (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy > z\}$

4. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

   (a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

   (b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

   (c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

   (d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

   (e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

   (f) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

5. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

(a) $S = [0,1]$ (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ (c) $S = [-1,0) \cup \{1\}$

(d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ (e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. (a) Demostrar que S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.
(b) Demostrar que S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ$.

8. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.
   (a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.
   (b) *Un punto* $p \in S$ *se llama* un punto aislado de S *si y sólo si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

9. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right), \text{con } n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

10. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

11. Probar que todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. ¿Es cierta la recíproca?

12. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales y sea A el conjunto de sus puntos límite.
    (a) Probar que A es compacto.
    (b) Probar que el máximo y el mínimo de A son respectivamente $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ y $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$.

13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $\Im_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0,1) = \bigcup\limits_{n \geq 2} \Im_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup\limits_{n \in \mathcal{F}} \Im_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0,1)$?

14. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

15. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

16. Sea $U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \| (x,y) - (0,n) \| < n\}$. Demostrar que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

17. Sea $S = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\ /\ n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ (cf. ejercicio 4 (f) de la Práctica 1). Demostrar que los puntos de acumulación de S son los puntos de la forma $\dfrac{1}{n}$ y el 0. ¿Es el conjunto $S \cup \{0\}$ compacto?