

Práctica 2

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2} \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} & e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3} \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} & i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{array}$$

2. Hallar la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{l}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}} \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \text{Sugerencia: Desarrollar en fracciones simples.} \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}
 \end{array}$$

3. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

4. Demostrar que la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\alpha}$$

converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leq 1$.

5. Establecer el siguiente criterio de comparación: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos converge y si

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

a partir de cierto término, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente. Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y si

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente.

6. Por comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, establecer el *criterio de Raabe*: la serie de términos positivos $\sum a_n$ converge o diverge según

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

sea mayor que $1 + \varepsilon$ o menor que $1 - \varepsilon$ para todo n suficientemente grande, y para algún $\varepsilon > 0$ independiente de n .

7. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Sug.: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y similarmente para na_{2n+1} .

8. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea b_n una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n b_{2^n}$ converge.

9. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$

10. a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

11. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

12. Sea $|x| < 1$. Mostrar que

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Definición: dadas dos sucesiones de número reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, definimos como el producto de Cauchy a la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

13. Si se define la función exponencial $\text{Exp}(x)$ por su serie de potencias

$$\text{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

probar (utilizando el producto de Cauchy de series) que $\text{Exp}(x+y) = \text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y)$.

14. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente?

Sugerencia. Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

15. Sea F_n la sucesión de Fibonacci definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ si $n \geq 1$. Consideramos la función definida por la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

- a) Encuentre una expresión explícita de f (es una función racional)
- b) Utilícela para deducir una fórmula explícita para F_n .
- c) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de f ?