Ejercicios para entregar, Práctica 3

Durante las clases prácticas se mencionó el siguiente ejercicio posible para entregar

- Equivalencias entre las posibles definiciones de compacto en $\mathbb{R}$ (ver algunas en Teorema 3.3.8 del libro de Abbott, visto también en la teórica para $\mathbb{R}^n$). Sea $K \subseteq \mathbb{R}$. Son equivalentes:

  i) K es cerrado y acotado.

  ii) Toda sucesión de elementos de K tiene una subsucesión que converge a un elemento de K.

  iii) Todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

  iv) Para toda familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de cerrados, si cada vez que tomo finitos su intersección contiene a algún elemento de K (ojo, no siempre tiene que ser el mismo elemento de K!), entonces la intersección de todos también.

  (no es necesario entregar todas las implicaciones, se puede entregar una o dos)

Se agrega a la lista los siguientes ejercicios

- Sean d una distancia en $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $p \in \mathbb{R}^n$. Se define la distancia $d(p, A)$ entre p y A como
$$d(p, A) = \inf\{d(p, a) : a \in A\}.$$

  a) Probar que $d(p, A) = 0$ si y solo si $p \in \overline{A}$.

  b) Probar que si A es cerrado la distancia entre p y A se realiza, esto es, existe $a \in A$ tal que $d(p, A) = d(p, a)$.

- Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos y separados (o sea $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$). Probar que existen U, V abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.
Sug: usar la noción de distancia entre puntos y conjuntos definida arriba.

- Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto tal que $0 \notin K$. Probar que $\{\frac{1}{x} : x \in K\}$ es compacto.

La entrega de uno o varios de estos ejercicios es completamente opcional, pero es recomendada para tener una instancia previa de corrección antes del examen. De entregar ejercicios, hacerlo antes del 17/11.