Axiomas de los número reales

1 Axiomas de cuerpo

Asumimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma* y *producto*, tales que a cada par de números reales x e y la suma $x+y$ y el producto xy son números reales unívocamente determinados por x e y y satisfacen los siguientes axiomas:

1.1 Axiomas de la suma

S1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

S2. $x+y = y+x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

S3. Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbf{0}$ tal que $x+0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

S4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = 0$.

1.2 Axiomas del producto

P1. $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

P2. $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

P3. Existe un elemento de $\mathbb{R}$, distinto de 0, que denotaremos por $\mathbf{1}$ tal que $1x = x1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que no sea cero, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$.

1.3 Axioma de distributividad

D. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x+y)z = xz + yz$.

2 Axiomas de orden

Asumimos la existencia de una relación $\leq$ que establece un orden entre los números reales y satisface los siguientes axiomas:

O1. Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$.

O2. Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

O3. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ó $y \leq x$.

SO. Si $x \leq y$, entonces $x+z \leq y+z$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

PO. Si $0 \leq x$ y $0 \leq y$, entonces $0 \leq xy$.

Definición: *$x < y$ si $x \neq y$ y $x \leq y$.*

3 Axioma de completitud

C. Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, es acotado superiormente, entonces tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Teorema: (Arquimedianidad) *Para todo $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$nx > y.$$