1. Sea $(X_1, X_2, \dots)$ un proceso de Bernoulli de parámetro p.

   a) Calcule la probabilidad que haya menos de 5 éxitos entre los ensayos 27 y 47.

   b) ¿Cuál es la probabilidad que el tercer éxito haya ocurrido antes del ensayo 13?

   c) ¿Cuál es la probabilidad que la tira 10001010111010 aparezca entre los ensayos 105 y 120?

2. Sea $Y_i =$ instante del i-ésimo éxito. Calcule la probabilidad $P(Y_i = k)$.

3. Sea $R_t = \text{mín}\{i \geq 0 : X_{t+i} = 1\}$. Calcule $P(R_t = k | R_{t-1} = h)$.

4. Dadas $X_i^\ell \sim$ Bernoulli (λ/ℓ) con $i \in \mathbb{N}$, sea el proceso binomial rescalado $(S_t^\ell, t \geq 0)$ definido por $S_t^\ell := \sum\limits_{i: i \leq \ell t} X_i^\ell$.

   a) Demuestre que los incrementos de S_t^ℓ convergen en distribución a los incrementos de un proceso de Poisson:
$$S_{t+h}^\ell - S_t^\ell \longrightarrow^{\mathcal{D}} N_{t+h} - N_t$$

   b) Sean Y_i^ℓ los instantes de crecimiento de S_t^ℓ:
$$Y_i^\ell := \text{mín}\{t > Y_{i-1}^\ell : S_t^\ell - S_{t-1}^\ell = 1\}$$
   Usando que ℓY_i^ℓ tiene distribución binomial negativa, demuestre que Y_i^ℓ converge en distribución a una Gamma(i, λ).

5. Defina el proceso de tiempos entre llegadas $(T_i^\ell : i \geq 0)$ por
$$T_i^\ell := Y_i^\ell - Y_{t-1}^\ell$$

   a) Demuestre que T_i^ℓ son iid con distribución $P(T_i^\ell > t) = (1 - \lambda/\ell)^{t\ell}$. Concluya que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson son iid exponenciales λ.

   b) Demuestre que si T_i iid exponenciales(λ), entonces $Y_j = \sum\limits_{i=1}^{j} T_i$ tiene distribución Gama(j, λ).

   c) Sea
$$N_t := \text{máx}\{n \geq 0 : Y_n < t\}$$
   Pruebe que $N_t \sim P(\lambda t)$.

6. Sea N un proceso de Poisson. Dados $T > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, mostrar que para cada $0 \leq a < b \leq T$ la variable aleatoria $N_{(a,b]}$ condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ tiene distribución $\mathcal{B}i(n, p_{b-a,T})$, donde $p_{b-a,T} := \frac{b-a}{T}$. Es decir, para todo $0 \leq k \leq n$ se tiene
$$P(N_{(a,b]} = k | N_{(0,T]} = n) = \binom{n}{k} p_{b-a,T}^k (1 - p_{b-a,T})^{n-k}$$
   ¿Se anima a conjeturar, basándose en este resultado, cuál debería ser la distribución conjunta condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ de los n puntos del proceso de Poisson sobre el intervalo $[0, T]$?