

Nombre y apellido..... Número de libreta.....

**Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega**

Entrego ejercicios 1 2 3 4

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota

**Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.**

- (25 puntos) Se tiene una urna con 4 bolitas rojas y 12 negras. Se lanza un dado todas las veces necesarias hasta obtener un 1. En caso de que salga el 1 luego de un número par de tiradas, se extraen de la urna bolitas sin reposición (con un tope máximo de hasta 4 extracciones) la cantidad de veces que tiramos el dado. Caso contrario, se extrae de la urna 4 bolitas con reposición.
  - (5 puntos) Calcular la probabilidad de obtener un 1 en número impar de tiros.
  - (7 puntos) Calcular la probabilidad de extraer 4 bolitas.
  - (7 puntos) Calcular la probabilidad de obtener exactamente 2 rojas entre las bolitas extraídas.
  - (6 puntos) Sabiendo que se sacaron exactamente 2 rojas entre las bolitas extraídas, ¿cuál es la probabilidad de haber arrojado 4 veces el dado?
- (25 puntos) Una característica distintiva de la raza de perro beagle es el bajo umbral de estimulación del ladrido en general, es decir, que tradicionalmente los perros de raza beagle son perros muy ladradores. Klaus, un vecino molesto de la ciudad de Zürich está dispuesto a denunciar a Agnes, la propietaria de un beagle si sus mañanas tranquilas son interrumpidas por el distintivo sonido del ladrido. La cantidad de ladridos del pequeño Elfried (el perro en cuestión) tiene distribución de Poisson con parámetros  $\lambda = 5$  ladridos por mañana. Klaus, conciente de las severas normativas de la ciudad y de la avanzada edad de Agnes, decide hacer la denuncia si escucha más de 8 ladridos en el lapso de una mañana.
  - (8 puntos) Calcule la probabilidad de que Klaus, en sus vacaciones de 10 días, tenga el placer de disfrutar de al menos 2 mañanas en las cuales Elfried no haya ladrado.
  - (9 puntos) La multa por cada mañana en la cual Klaus hace una denuncia es de 100\$ francos suizos con un tope de 400 \$ francos mensuales, momento en el cual Agnes decide llevarlo al campo (al menos por ese mes). Calcule el valor esperado de la multa que deberá incurrir mensualmente Agnes (cada mes consta de 30 días).
  - (8 puntos) Agnes está considerando seriamente regalar al pequeño Elfried a su prima Getrud, lo hará en la tercer mes que tenga que pagar 400 \$ francos suizos. Calcule la probabilidad de que Gertrud se quede con el pequeño Elfried antes de que termine el año (cada año se compone de 12 meses de 30 días).
- (25 puntos) Una caja tiene 60 lámparas de tipo A, cuya duración es exponencial de parámetro  $\lambda$  desconocido, 20 lámparas de tipo B, cuya duración en meses es una distribución continua con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = kx^2 I_{(5,10)}(x) + \frac{1}{50} I_{(10,20)}(x)$$

y, finalmente, 20 lámparas de tipo C cuya duración en meses es una normal con media 7 meses y desvío estándar 1 mes. Se sabe que al elegir una lámpara al azar la probabilidad de que dure más de 8 meses es 0.6.

- (6 puntos) Halle todos los parámetros desconocidos ( $k$  y  $\lambda$ ).
  - (6 puntos) Sea  $Y$  la duración de una lámpara elegida al azar, calcule la densidad  $f_Y$  y la esperanza  $E(Y)$ .
  - (6 puntos) Se eligen, con reposición, 15 lámparas. Calcule la probabilidad de que haya al menos dos lámparas que duren más de 7 meses.
  - (7 puntos) Sabiendo que una lamparita duró 7 meses o más, calcular la probabilidad de que se haya elegido una lamparita de tipo A.
- (25 puntos) Considere  $(X, Y)$  el vector aleatorio con la siguiente función de densidad:

$$f_{XY}(x, y) = kxy^2 I_{(0,2)}(x) I_{(-1,x^3)}(y)$$

- (5 puntos) Graficar el soporte de  $(X, Y)$ .
- (5 puntos) Determinar el valor de  $k$  para que efectivamente sea una densidad.
- (5 puntos) Obtener  $f_X$ .
- (10 puntos) Calcular  $P(Y < X)$  y  $P(Y \leq 1 | X = 3/2)$ .