Variables Continuas

Proba (C)-2015

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria X se dice absolutamente continua sii existe $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du\ .$$

En tal caso, diremos que f_X es la función de densidad de la variable aleatoria X.

Densidad

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice densidad si

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du = 1$

Propiedades:

1. $F_X' = f_X$
2. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds$
3. F_X es una función continua
4. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ ($<$ o $\leq$).

Esperanza, Varianza

1. Definición: $E[X] = \int x f_X(x) dx$, medida de posición.
2. Propiedad: $E[g(X)] = \int g(x) f_X(x) dx$
3. Corolario: Linealidad $E[aX + b] = aE[X] + b$
4. Definición: $V(X) = E[(X - \mu_X)^2]$, donde $\mu_X = E[X]$, medida de dispersión.
5. Propiedad: $V(X) = E[X^2] - \mu_X^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$
6. Desvío estandar: $SD(X) = \sqrt{V(X)}$, $SD(aX + b) = |a| SD(X)$

Percentiles (esto es nuevo!)

Dada una variable aleatoria continua X y dado $p \in (0, 1)$ definimos el $100p-$ ésimo percentil de X como el valor x_p que verifica

$$F_X(x_p) \ = \ p \ .$$

Cuando $p = 1/2$, el valor para el cual la acumulada vale $1/2$ se dice mediana. Los percentiles asociados a $p = 1/4$ y $p = 3/4$ se dicen cuartiles.

Famosas 1: Uniforme

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrario}\ . \end{cases} \tag{1}$$

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b\ , \end{cases}$$

Notación:

$$X \sim \mathcal{U}(a, b)\ .$$

$$E[X] \;=\; \frac{a+b}{2} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}\ .$$

Uniforme

- densidad: existen $a < b$ de forma tal que

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

- $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.