suma+ 59

Noviembre 2008, pp. 23-30

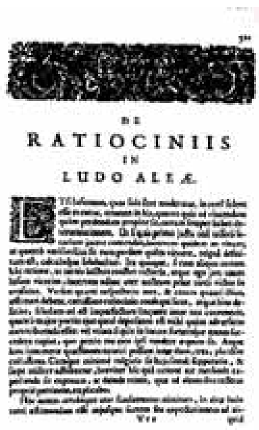
El problema de la ruina del jugador

El último de los problemas propuesto a los lectores en el Tratado de Huygens, publicado por primera vez en 1657, es hoy día conocido como El problema de la ruina del jugador. *Dicho problema consiste en calcular la probabilidad de que un jugador arruine al contrario en un juego a un número indeterminado de partidas, cuando los dos jugadores inician el juego con un cierto número de monedas cada uno. A priori, su enunciado asusta cuando se enfrenta por primera vez, pero puede ser un buen recurso didáctico para profesores que enseñan cálculo de probabilidades a estudiantes de un determinado nivel, dada la resolución elegante y cómoda que se dispone, sin necesidad de un gran aparato matemático. La autoría del problema, tradicionalmente asignada a Huygens, la resolución de éste, la de De Moivre de 1712, así como una resolución más actual y cercana al estudiante del mismo, forman parte del contenido de este artículo.*

At the end of his famous treatise on probability, De ratiociniis in ludo aleae, *Huygens(1657) posed five problems for his readers to solve. The fifth of theses has become known as the "gambler's ruin" problem. This problem consist in a game played as a series of independents Bernoulli trials with players A and B betting a value of 1 at each trial. Play ends when the capital of one of the players has been exhausted, i.e., the player has been ruined. The present article examines Huygens' own worked solution, De Moivre's solution and a current one. This problem could be interesting to students in the probability calculation because the solution is easy and doesn't need to much mathematics.*

Introducción

Al final del tratado de Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, cuya versión en latín fue publicada por primera vez en 1657, encontramos cinco ejercicios propuestos por el autor y no resueltos, aunque en tres de ellos se da la solución. El último de estos ejercicios pasó a la historia del cálculo de probabilidades como "El problema de la ruina del jugador". Se trata de un juego entre dos jugadores a un número indeterminado de partidas, donde en cada partida se juegan una moneda (quién la pierde le paga al otro una moneda) y que sólo concluye cuando uno de los dos jugadores ha perdido todo su dinero. Tenemos, pues, un juego que podría tener duración infinita. El problema plantea el cálculo de la probabilidad de que un jugador arruine al contrario sabiendo la cantidad de monedas con las que parte cada uno (en un principio Huygens establecía el mismo número de monedas para ambos) y conociendo las probabilidades de ganar en cada partida de cada uno de los jugadores, probabilidades que no tienen por qué ser iguales, aunque si constantes a lo largo de todo el juego. Se supone, además, que las partidas son sucesos independientes entre sí, o sea, el resultado de una partida no influye en los resultados posteriores, cosa que ocurre en un juego de puro azar, donde el jugador no va aprendiendo con el desarrollo del juego.



DE

RATIOCINIIS

IN

LUDO ALEÆ.

En *De ratiociniis* Huygens da la solución del problema, proponiendo la resolución al lector. Dado que es aquí, en ese tratado, donde aparece enunciado por primera vez, la tradición ha situado en Huygens la autoría del mismo. Sin embargo, se trata de un problema que Pascal propuso a Fermat, creyéndolo "más difícil que todos los demás", en el contexto de la correspondencia que ambos autores franceses mantuvieron de forma directa en 1654, y de manera indirecta entre 1655 y 1656 (para más detalle de esta correspondencia, ver Basulto y Camúñez, 2007). El problema se hace aún más conocido gracias a la edición comentada de James Bernoulli de *De ratiociniis* que constituye la Parte I de su *Ars conjectandi* (Bernoulli, 1713). Bernoulli tuvo alguna dificultad en su intento de justificar la solución, opinando entonces como Pascal sobre la dificultad del problema (hay una traducción al inglés del texto de Bernoulli realizada por Edith Dudley Sylla, 2006).

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz
Mª Dolores Pérez Hidalgo
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Sevilla.

Cristiaan Huygens

Jacob Bernoulli

El hecho de que el nombre de Pascal no esté asociado con este problema tiene una fácil explicación: Huygens no menciona su fuente (y, probablemente, Bernoulli no la conoce) la cual sólo fue revelada con la publicación de la correspondencia de Huygens en 1888, en el primer tomo de sus Obras Completas, publicación llevada a cabo por la Sociedad Holandesa de las Ciencias. Como esto ocurrió después de que Todhunter escribiese su *History of the Mathematical Theory of Probability* (Todhunter, 1865), éste no recoge tampoco el origen, y este libro ha sido la mayor fuente secundaria de información sobre la historia inicial de la probabilidad desde entonces. No se conoce si el problema tiene alguna historia previa a Pascal, aunque parece un problema perfectamente natural entre jugadores que buscan nuevos juegos más excitantes. Tuvo una especial importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad porque permitió a los matemáticos, en el inicio del siglo XVIII, investigar sobre otro tópico de este nuevo cálculo: la duración del juego. “El último de los cinco problemas que Huygens dejó para resolver” escribe Todhunter, “es el más notable de todos. Es el primer ejemplo sobre la *duración del juego*, un asunto que posteriormente sirvió para mostrar la elevada capacidad de De Moivre, Lagrange y Laplace”.

Hoy, como se ha dicho, tenemos la suerte de conocer la correspondencia previa a la edición del tratado de Huygens, la que mantuvo con los sabios franceses y que justifica lo comentado sobre la autoría del problema. A continuación mostramos dos fragmentos traducidos al castellano de dos cartas que son relevantes de lo que estamos diciendo. El primer fragmento corresponde a una carta que Pierre de Carcavy (amigo de Pascal y Fermat, que usó esa amistad para hacer de intermediario entre ambos) envió a Huygens el 28 de septiembre de 1656, un año antes de la publicación del tratado de este último. Podríamos decir que aquí aparece una primera versión del enunciado del problema. Es el siguiente:

> He aquí otra proposición que él[1] ha hecho al señor de Fermat y que juzga sin comparación más difícil que todas las demás.
>
> Dos jugadores juegan con esta condición de que la chance del primero sea 11, y la del segundo 14, un tercero lanza los tres dados para ellos dos, y cuando sale 11 el 1º marca un punto y cuando sale 14, el segundo marca uno de su parte. Juegan a 12 puntos, pero con la condición de que si aquel que lanza los dados consigue 11, y así el primero marca un punto, si ocurre que los dados hacen 14 en el lanzamiento posterior, el segundo no marca un punto, sino que resta uno del primero, y así recíprocamente, de manera que si los dados llevan seis veces 11, con lo que el primero ha marcado seis puntos, si después los dados sacan tres veces seguidas 14, el segundo no marcará nada sino que restará tres puntos del primero, si después también ocurre que los dados hacen seis veces seguidas 14, no le quedará nada al primero, y el segundo tendrá tres puntos, y si aparece aún ocho veces seguidas 14, sin aparecer 11 entre medio, el segundo tendrá 11 puntos y el primero nada, y si ocurre cuatro veces seguidas 11, el segundo no tendrá más que siete puntos, y el otro nada, y si ocurre 5 veces seguidas 14 él habrá ganado.
>
> La cuestión pareció tan difícil al señor Pascal que dudó si el señor de Fermat lo llevaría a cabo, pero él me envió en el acto esta solución. Aquél que tiene la chance de 11 contra el que tiene la chance de 14 puede apostar 1156 contra 1, pero no 1157 contra 1. Y que así la verdadera razón del reparto estaría entre ambas, pero como el señor Pascal ha sabido que el señor de Fermat ha resuelto muy bien lo que le había sido propuesto, me ha dado los verdaderos números para enviárselos, y para testimoniarle de su parte que él no habría propuesto una cosa que no hubiese resuelto antes. Helos aquí.
>
> 150094635296999122.
>
> 129746337890625.
>
> Pero lo que encontraréis más considerable es que el citado señor de Fermat tiene la demostración, como también el señor Pascal de su parte, aunque hay apariencia de que se están sirviendo de métodos diferentes.

La *demostración* de la que habla Carcavy, de Pascal y de Fermat, nunca fue conocida. Edwards (1983) sugiere cómo podrían haber resuelto ambos teniendo en cuenta los métodos que usaron para resolver otros problemas del mismo contexto.

El segundo fragmento corresponde a la carta respuesta de Huygens, que le envió a Carcavy el 12 de octubre de 1656. En ella, Huygens, además de introducir una segunda versión del enunciado del problema, deja entrever cómo lo resuelve pero no se muestra demasiado explícito. Parece que su preocupación en la misma es mostrar a su interlocutor que él también sabe resolverlo. El fragmento es el siguiente:

> La proposición que él[2] hace al señor de Fermat me pareció en primer lugar bastante embarazosa, pero he visto pronto que no es más que una cuestión de esto, a saber, que cuando uno de los jugadores marca un punto cuando ocurre 11 con tres dados y el otro lo marca cuando ocurre 14, y de estos dos gana el que primero haya marcado 12 puntos de ventaja sobre el otro, es necesario determinar la ventaja de cada uno de ellos. Siendo el problema muy bonito en mi opinión, y viendo que el señor Pascal lo había juzgado tan difícil que hasta dudó que el señor de Fermat lo pudiese conseguir, no he podido impedirme yo también la búsqueda de la solución, aunque vos me hayáis enviado aquellas que los dos han efectuado. Me he servido siempre del mismo teorema que está arriba, y por medio de éste y del álgebra he encontrado la regla general para esta solución, que es muy simple como vos veréis. Estando dadas tales chances que se quiera de 2 o tres o varios dados, y algún número de puntos que finalizan el juego, es necesario ver en primer lugar cuántos azares hay para cada una de las chances u otros dos números en la misma razón. Siendo multiplicados los números de estos azares cada uno por si mismo tantas veces como puntos haya que finalizan el juego, los productos tendrán entre ellos la proporción requerida de las ventajas. Por ejemplo, en el caso que el señor Pascal propone hay 27 azares para la chance de 11, y 15 azares que dan 14. Ahora bien, como 27 es a 15 como 9 es a 5, es necesario multiplicar el 9 y el 5 cada uno 12 veces por si mismo, porque se juega a 12 puntos; los productos son 282429536481 y 244140625, que yo digo, expresan la verdadera proporción de las ventajas. También ellos tienen entre si la misma razón que aquellos del señor Pascal que eran 150094635296999121 y 129746337890625, y son los más pequeños que se pueden encontrar. Si la chance de uno fuese 10, y la del otro 13, y si ellos jugasen a 10 puntos, las ventajas serían por esta regla como 3486784401 a 282475249, y si las chances fuesen 13 y 17, jugando a 12 puntos, la ventaja del uno a la del otro será precisamente como 13841287201 a 1. Lo que parecerá a primera vista bastante extraño.
>
> El método con el que yo encuentro la regla me enseña también al mismo tiempo a hacer la demostración que resultará, no obstante, muy larga

Establecidos los antecedentes, creemos interesante a nivel didáctico, de aprendizaje, de formación complementaria y, por tanto, íntegra, que un alumno de último año de bachillerato o de primer curso universitario conozca la génesis de este problema y la resolución que le dio el primer autor que lo publicó. Una de las primeras consecuencias que un alumno aprende cuando se inicia en cálculo de probabilidades es el Teorema de la Probabilidad Total. Pues bien, un uso adecuado y reiterado de ese teorema, junto con un buen manejo de la suma de progresiones geométricas, conduce a una resolución eficaz y contundente, además de sencilla, de un problema de nombre atrayente pero de resolución a priori compleja. Esa es nuestra apuesta, que ya hemos experimentado en alumnos de primer año universitario: enseñar cálculo de probabilidades usando problemas "reales" con aparente dificultad pero con resoluciones asequibles si se manejan adecuadamente los instrumentales aportados. Por último, si tras la resolución clásica mostramos la solución ágil y original que le dio uno de los autores que más aportaron al desarrollo temprano del cálculo de probabilidades, Abraham de Moivre, nadie con un mínimo de sensibilidad matemática dejará de sorprenderse. Este es el objetivo que nos proponemos y los siguientes epígrafes lo van desarrollando en ese mismo orden.

Enunciado y resolución de Huygens

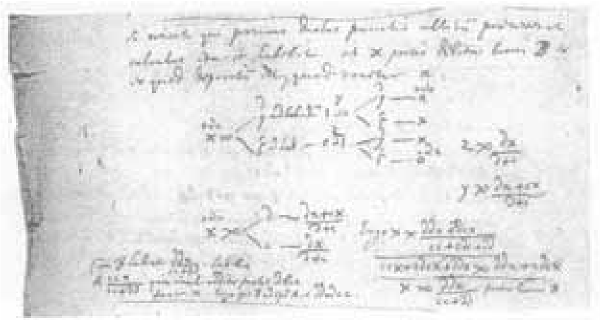
El enunciado que este autor le dio para aparecer al final de su Tratado (publicado por primera vez, como se ha dicho, en 1657) es el siguiente:

> Habiendo tomado cada uno 12 fichas, A y B juegan con 3 dados con esta condición de que a cada tirada de 11 puntos, A debe dar una ficha a B, y que B debe dar una ficha a A en cada tirada de 14 puntos, y que ganará aquel que sea el primero en poseer todas las fichas. Se encuentra en este caso que la chance de A es a la de B como 244140625 es 282429536481.

La resolución detallada aparece en unas hojas sueltas escritas por Huygens en 1676 y que la edición de sus Obras Completas la incluye como Apéndice VI en el tomo XIV de las mismas, tomo publicado en 1920. Queremos señalar que estas hojas sueltas son presentadas como las primeras en la historia que incluyen árboles de probabilidad para la comprensión y demostración de los resultados (Shafer, 1996).

Según se desprende de la lectura anterior de los fragmentos epistolarios, cuando Huygens lee el enunciado propuesto por Pascal, con la redacción de Carcavy, inmediatamente lo enfoca pensando que los puntos de los jugadores se acumulan en la vía ordinaria, pero el ganador será el primero que lleve doce puntos de ventaja (en 1656), y cuando él lo plantea en su *De ratiociniis* (en 1657) lo da en términos de que cada jugador arranca con doce puntos, y una ganancia de un jugador supone la transferencia de un punto de su oponente a él mismo, y el ganador total es el que arruina al otro de todos sus puntos. Las tres formas de este problema de Pascal son desde luego, equivalentes, pero es en la última forma como el problema es conocido como el de la "Ruina del jugador".

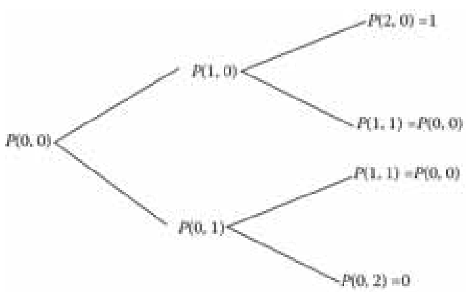
Describimos a continuación la resolución de este autor, adaptándola a un lenguaje más actual. Podemos decir que en la formulación de Pascal, los jugadores arrancan con el tanteo (0,0), donde el primer 0 representa los puntos que tiene el primer jugador al inicio del juego y el segundo 0 de la pareja lo mismo para el segundo jugador. El ganador es aquel que primero consigue 12 puntos (teniendo el otro 0 puntos). Pues bien, ésta es también la forma que Huygens usa en su resolución de 1676.



Copia de un fragmento original del manuscrito de Huygens donde resuelve el problema de la ruina del jugador y donde aparece por primera vez en la historia los árboles de decisión

Dado que se lanzan tres dados y el jugador A necesita 11 puntos, el número de resultados favorables al mismo es 15 de los $6^3 = 216$ resultados posibles, mientras que el número de resultados favorables al jugador B, que necesita sumar 14 puntos, es 27. En total hay 15 + 27 resultados que favorecen a uno u otro jugador. El resto, hasta los 216 posibles no favorecen a ninguno de los dos. Por eso, este autor considera $p = 15/42 = 5/14$ como una medida de la chance del jugador A en cada partida o lanzamiento de los tres dados, y $q = 27/42 = 9/14$ la medida equivalente para el jugador B. Es claro que $p + q = 1$. Supongamos que $P(a,b)$ es la probabilidad que tiene A de ganar el juego (de arruinar a B) cuando este jugador tiene a puntos y B tiene b puntos. El problema es encontrar $P(0,0)$. Huygens habla en términos de chances, que identifica con esperanzas del jugador en cada situación. Si el total apostado es la unidad, entonces la esperanza de un jugador en cada situación coincide con su probabilidad de ganar.

El autor comienza analizando el caso simple en el que el juego se acaba cuando uno de los jugadores llega a 2 puntos. Da una lista de todos los posibles resultados y sus probabilidades en un diagrama de tipo árbol. El diagrama que presenta, con una visualización actual, es el siguiente:



Vemos que Huygens supone que $P(1,1) = P(0,0)$, lo cual es lógico, dado que ambos casos, en (0,0) y (1,1), el primer jugador necesita realizar el mismo esfuerzo para conseguir arruinar al segundo.

Del esquema podemos deducir las siguientes igualdades, usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(0, 0) = p\cdot P(1,0) + q\cdot P(0,1) =$
$= p(\, p\cdot P(2,0) + q\cdot P(1,1)) + q(\, p\cdot P(1,1) + q\cdot P(0,2))=$
$=p(p+q\cdot P(0,0)) + q(p \cdot P(0,0) + q\cdot 0) = p^2 + 2pq\cdot P(0,0)$

Teniendo en cuenta que $p + q = 1$, podemos obtener $P(0, 0)$, resultando:

$$P(0,0)=\frac{p^2}{p^2+q^2}$$

Por tanto, la esperanza del primero es a la del segundo como p^2 es a q^2.

Después, Huygens estudia el caso en el que el ganador ha de conseguir cuatro puntos de ventaja. Ingeniosamente, resuelve considerando sólo uno de cada dos posibles estados del juego, a saber los puntos (4,0), (2,0), (0,0), (0,2) y (0,4), y señala que el árbol de sucesos será similar al primero, salvo que todas las chances son cuadradas. La justificación para omitir los puntos intermedios es, evidentemente, que para pasar de (0,0) a (0,4), por ejemplo, es necesario pasar por (0,2). Huygens no ofrece explicación, más allá de un diagrama, aunque el planteamiento origina tres ecuaciones con la solución:

$$P(0,0)=\frac{p^4}{p^4+q^4}$$

Entonces, las chances de los dos jugadores están en la relación $p^4 : q^4$.

Finalmente, señala que si es necesaria una ventaja de 8 puntos, aplicando nuevamente el argumento anterior:

$$P(0,0)=\frac{p^8}{p^8+q^8}$$, y así.

Si se requiere una ventaja de 3 puntos para ganar, él hace el paso de (0,0) a (1,0) con probabilidad p y después a (3,0) con probabilidad p^2, y de manera similar para las demás ramas del diagrama, lo que le lleva a las ecuaciones:

$$P(1,0)=\frac{p^2P(3,0)+q^2P(1,2)}{p^2+q^2}=\frac{p^2+q^2P(0,1)}{p^2+q^2}$$

$$P(0,1)=\frac{p^2P(2,1)+q^2P(0,3)}{p^2+q^2}=\frac{p^2P(1,0)}{p^2+q^2}$$

$$P(0,0) = p\cdot P(1,0) + q\cdot P(0,1)$$

con la solución:

$$P(0,0)=\frac{p^3}{p^3+q^3}$$

De aquí él generaliza para:

$$\frac{p^6}{p^6+q^6}$$

Los casos considerados hasta aquí requieren la solución de tres ecuaciones. Si es necesaria una ventaja de 5 puntos para ganar, el número de ecuaciones llega a ser considerablemente mayor, y Huygens señala que una solución puede ser obtenida como para *n= 3* pero que tomaría un tiempo mucho mayor. Finalmente, afirma que, en general, la ratio de las esperanzas de A a B es $p^n : q^n$, aunque *no vemos como concluir en general que las esperanzas de A y B están en la razón de las potencias* lo que justifica la solución aportada en su tratado de $5^{12} : 9^{12}$.

Una resolución actual

Uno de los grandes retos del jugador es el de hacer saltar a la banca, o sea, conseguir que la banca se quede sin fondos. Por tanto, nos permitimos plantear el problema como un juego entre un jugador y la banca y nos familiarizamos con los dos conceptos siguientes:

> "Ruina del jugador", cuando el mismo ha perdido todo su dinero, quedando en manos de la banca.
>
> "Hacer saltar a la banca", cuando ésta ha perdido todos sus fondos, pasando a manos del jugador.

Supongamos que el jugador comienza el juego con n monedas, mientras que la banca dispone de m, donde n y m no tienen que ser iguales, necesariamente. Suponemos que $n+m=K$. Por tanto, K es el número total de monedas que hay en juego. En cada partida se juega una moneda. Como antes, suponemos independencia de las partidas y probabilidad constante en cada partida de ganar el jugador o la banca. Nos planteamos, de nuevo, la probabilidad que tiene el jugador de hacer saltar a la banca.

Sea p la probabilidad que tiene el jugador de ganar en cada partida, sea q la probabilidad de la banca. Para simplificar el problema, $p+q=1$, o sea, en cada partida o bien gana el jugador, o bien la banca, no pudiendo darse un resultado que no favorezca ni a uno ni a otro.

Sea w_i la probabilidad de que el jugador haga saltar a la banca cuando él dispone de i monedas. Por tanto, 1- w_i es la probabilidad de que la banca arruine al jugador cuando éste tiene i monedas. Podemos escribir:

$w_0=0$, pues el jugador ya ha perdido todas sus monedas, no puede seguir jugando y, por tanto, no tiene ninguna posibilidad de hacer saltar a la banca.

$w_1=p\cdot w_2$, pues si al jugador le queda una moneda, la única posibilidad de seguir en el juego es ganando la siguiente partida. Por tanto, la probabilidad de hacer salta a la banca disponiendo de una sola moneda es igual a la probabilidad de ganar la siguiente partida (juntando entonces 2 monedas) por la probabilidad de hacer saltar la banca cuando se dispone de 2 monedas.

$w_2=p\cdot w_3+q\cdot w_1$, pues, la probabilidad de que haga saltar la banca con dos monedas es igual a la probabilidad de que gane la siguiente partida (juntando entonces 3 monedas) por la probabilidad de que haga saltar la banca con 3 monedas mas la probabilidad de perder la siguiente partida (quedando entonces con una sola moneda) por la probabilidad de hacer saltar la banca con una moneda. Vemos, pues, que el conocido Teorema de la Probabilidad total nos sirve perfectamente para ir construyendo las igualdades que definen una recurrencia en función del número de monedas que tiene el jugador.

$w_k=1$, pues el jugador ya tiene todas las monedas, ha hecho saltar a la banca.

Podemos generalizar y resumir escribiendo:

$w_0=0$, $w_K=1$,
$w_i=p\cdot w_{i+1}+q\cdot w_{i-1},\quad i=1, 2, ..., K-1$

Este conjunto de igualdades, conocido como ecuación en diferencias, admite una resolución algebraica sencilla que pasamos a desarrollar.

Siempre es posible escribir $w_i=(p+q)\cdot w_i=p\cdot w_i + q\cdot w_i$. Igualando los segundos miembros de esta igualdad y la anterior, tenemos $p\cdot w_i + q\cdot w_i=p\cdot w_{i+1} + q\cdot w_{i-1}$, o sea, $p\cdot w_{i+1} - p\cdot w_i=q\cdot w_i - q\cdot w_{i-1}$. De aquí, obtenemos:

$$w_{i+1}-w_i=\frac{q}{p}\left(w_i-w_{i-1}\right)$$

Presentamos esta última igualdad para distintos valores de i:

$$\text{Para } i=1,\ w_2-w_1=\frac{q}{p}\left(w_1-w_0\right)=\frac{q}{p}w_1,\ \text{pues } w_0=0.$$

$$\text{Para } i=2,\ w_3-w_2=\frac{q}{p}\left(w_2-w_1\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1.$$

$$\text{Para } i=3,\ w_4-w_3=\frac{q}{p}\left(w_3-w_2\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^3 w_1.$$

....

$$\text{Para } i-1,\ w_i - w_{i-1} = \frac{q}{p}(w_{i-1} - w_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} w_1$$

$$\text{Para } i,\ w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p}(w_i - w_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i} w_1$$

....

$$\text{Para } i = K-1,\ 1 - w_{K-1} = \frac{q}{p}(w_{K-1} - w_{K-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1} w_1, \text{ pues } w_K = 1.$$

Si sumamos miembro a miembro las igualdades anteriores obtenidas para los distintos valores de i, observamos que en el primer miembro se van cancelando todos los términos menos dos, mientras que en el segundo miembro podemos sacar factor común w_1. Tenemos entonces:

$$1 - w_1 = w_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}\right]$$

Por tanto:

$$1 = w_1\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}\right]$$

que nos permite obtener el valor de :

$$w_1 = \frac{1}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}}$$

Si la suma anterior hubiese llegado hasta la igualdad i-ésima, tendríamos:

$$w_i - w_1 = w_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

o sea:

$$w_i = w_1\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

y sustituyendo el valor de w_1 obtenido arriba, tenemos:

$$w_i = \frac{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}}$$

Teniendo en cuenta que el numerador y denominador están constituidos por sumas limitadas de progresiones geométricas con la misma razón y el mismo primer término, la expresión anterior se reduce a:

$$w_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^K}$$

Y esta sería la solución del problema. En el caso particular presentado por Huygens, donde p=5/14, q=9/14, i=12 y K=24, dicha solución se traduce a:

$$w_{12} = \frac{1 - \left(\frac{\frac{9}{14}}{\frac{5}{14}}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{\frac{9}{14}}{\frac{5}{14}}\right)^{24}} = \frac{1 - \left(\frac{9}{5}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{9}{5}\right)^{24}} = \frac{\frac{5^{12} - 9^{12}}{5^{12}}}{\frac{5^{24} - 9^{24}}{5^{24}}} = \frac{5^{12}}{5^{12} + 9^{12}}$$

Por tanto, la probabilidad del segundo jugador (de la banca en este caso) de ganar es:

$$1 - w_{12} = \frac{9^{12}}{5^{12} + 9^{12}}$$

y la razones de las suertes de ambos están en proporción $5^{12} : 9^{12}$.

A partir de la expresión general para w_i nos atrevemos a analizar algunos casos particulares que creemos de interés.

- Si p=q, entonces la probabilidad del jugador de hacer saltar a la banca se simplifica muchísimo:

$$w_i = \frac{i}{K}$$

El resultado se obtiene sustituyendo en la expresión de w_i dada como cociente de dos sumas limitadas de progresiones geométricas, pues, al sustituir en la última expresión nos queda indeterminada. Este resultado nos indica que, en igualdad de condiciones en cada lanzamiento, la probabilidad de hacer saltar la banca es el cociente entre lo que dispone el jugador y el dinero total en juego.

- Si q>p, si considerásemos i suficientemente grande, o sea, el jugador con una fuerte suma de dinero, de forma que:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^i \gg 1$$

podremos aproximar w_i de la siguiente forma:

$$w_i = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^K} \simeq \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i}{\left(\frac{q}{p}\right)^K} = \left(\frac{p}{q}\right)^{K-i}$$

Tenemos que dicha probabilidad es el cociente de probabilidades en cada partida elevado al dinero con el que cuenta la banca.

• Si $p<q$, y si K, o sea la cantidad total de dinero en juego, es suficientemente grande como para:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^K \simeq 0$$

entonces:

$$w_i \simeq 1-\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

con lo que si el jugador dispone de una cantidad i de dinero resulta casi seguro que hará saltar a la banca. La probabilidad de que el jugador se arruine sería:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

La resolución de Abraham de Moivre (1711)

En su trabajo *De Mensura Sortis*, publicado en 1711 en la *Phil. Trans.*, encontramos la resolución de Abraham de Moivre del problema que nos ocupa. Dicha resolución fue reproducida en las distintas ediciones de su famoso tratado *The Doctrine of Chances* (1718, 1738 y 1756). La demostración aportada por este investigador destaca por ser muy perspicaz y mucho más corta que las presentadas anteriormente. Merece la pena detenerse y saborear esta forma tan ingeniosa de resolver el problema.

Volvemos al caso de dos jugadores A y B, con probabilidades p y q, respectivamente, de ganar en cada partida o lanzamiento. En lugar de monedas, De Moivre supone que los jugadores cuentan cada uno de ellos con un cierto número de fichas y cada una de un valor distinto. Así, supongamos que al inicio del juego el jugador A dispone de a fichas y el jugador B cuenta con b fichas, de forma que el total de fichas en juego es $a+b$. El juego concluye cuando uno de los jugadores se queda sin fichas. Ambos jugadores han dispuesto las fichas en dos montones ordenados con las siguientes valoraciones para las mismas: En el caso del jugador A, la ficha que ocupa la base del montón vale q/p, la que está por encima de ésta vale $(q/p)^2$, la siguiente que está por encima de la segunda vale $(q/p)^3$, y así sucesivamente, hasta la última ficha de su montón de partida, la que está por encima de todas, cuyo valor es $(q/p)^3$. La valoración de las fichas del jugador B lleva un orden contrario. Así, la que ocupa la posición de más arriba, la que está por encima de todas en este segundo montón, vale $(q/p)^{a+1}$. La que sigue, la que está debajo de esta primera, tiene de valor $(q/p)^{a+2}$. La siguiente más abajo, $(q/p)^{a+3}$. Así, sucesivamente, vamos valorando hacia abajo en este segundo montón, de forma que la última, la de la base del mismo, tiene el valor $(q/p)^{a+b}$.


Abraham De Moivre

Se supone que en cada partida la ficha que ocupa la posición más alta en el montón del que la pierde es transferida al montón del que la gana ocupando entonces la posición más alta de dicho montón. O sea, en cada partida es apostada siempre la ficha más alta de cada montón. Entonces, en términos de valoración, en cada partida, la apuesta del jugador B es siempre (q/p) veces la del jugador A. Con este ingenioso razonamiento, De Moivre, garantiza esperanza nula para cada jugador en cada partida. Por ejemplo, en la situación inicial del juego, la esperanza del jugador A de ganar la primera partida sería:

$$p\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^a = 0$$

o sea:

$$p\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} = q\left(\frac{q}{p}\right)^a$$

lo mismo que para B, con lo que garantiza una partida justa. La última igualdad nos dice que el producto de la probabilidad del primer jugador en cada partida multiplicada por el valor de la ficha conseguida es igual al producto que corresponde al otro jugador.

Entonces, si P_a es la probabilidad que tiene el jugador A de ganar todas las fichas de B, cuando el primero cuenta con *a* fichas, o sea, al inicio del juego, y si P_b es la equivalente para el jugador B, De Moivre razona que si la esperanza cero se mantiene a todo lo largo del juego se ha de cumplir que multiplicado por el valor total de todas las fichas ganadas por A (si A arruinase a B) ha de ser igual a por el valor de las fichas ganadas por B (si B arruinase a A). O sea:

$$P_a\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}+\left(\frac{q}{p}\right)^{a+2}+\ldots\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}=P_b\left\{\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)^{2}+\ldots\left(\frac{q}{p}\right)^{a}\right\}$$

Si sumamos las dos progresiones geométricas limitadas de ambos miembros y tenemos en cuenta que $P_a+P_b=1$, podemos despejar P_a y obtenemos:

$$P_a=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Conseguimos así, de nuevo, la solución del problema, o sea, la probabilidad de que el jugador A arruine al contrario. ■

NOTAS

1 Se refiere a Blaise Pascal.

2 Se refiere a Blaise Pascal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. (2007): *La geometría del azar. La correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal*, Nivola, Madrid.

BERNOULLI, JACQUES (1713): *Ars conjectandi,* Basilea. Se ha usado la traducción al inglés, *The Art of Conjecturing,* de Edith Dudley Sylla, 2006, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

DAVID, F. N. (1962): *Games, Gods and Gambling*, Charles Griffin & Co. Ltd., London.

DE MOIVRE, A (1712): "De mensura sortis". *Phil. Trans. R. Soc. London*, 27, 213-264.

EDWARDS, A. W. F. (1983): "Pascal's Problem: The "Gambler's" Ruin". *International Statistical Review,* 51, 73-79.

FRANKLIN, J. (2001): *The Science of Conjeture. Evidence and Probability before Pascal*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

HACKING, I (1975): *The emergence of probability*, Cambridge University Press.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley & Sons, New York.

HUYGENS, C. (1888-1950): *Oeuvres Complètes*, 22 volúmenes, Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, *Correspondance 1638-56,* publicado en 1888, Vol. XIV, *Calcul des Probabilités; Travaux de mathématiques pures 16655-66*, publicado en 1920.

KORTEWEG, D. J. (1920): "Apercy de la Genèse de l'Ouvrage De Ratiociniis in Ludo Aleae et des Recherches subséquentes de Huygens sur les Questions de Probabilité", *Oeuvres de Huygens*, Vol. 14, 3-48.

PACKEL, E. (1995): *Las matemáticas de los juegos de apuestas*, Traducción de M. A. Hernández Medina, Colección La Tortuga de Aquiles, Nº 5, Euler, Madrid.

SHAFER, G. (1996): *The Art of Causal Cnjecture*, The MIT Press, Cambridge, Massachussets, London.

THATCHER, A. R. (1957): "A note on early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika*, 44, 515-518.

TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.