Ejemplos: Moda de Fallas

Quesensberry y Hurst (1964) clasifican 870 máquinas de acuerdo a la moda del número de fallas. En la tabla siguiente se muestran los datos.

	Moda de Fallas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de Máquinas	5	11	19	30	58	67	92	118	173	297

En la siguiente tabla se muestran los intervalos simultáneos calculados.

Table 2.2.7. 90% $\{I_i^{QH}\}_{i=1}^{10}$ and $\{I_i^{GM}\}_{i=1}^{10}$ Intervals foı Machine Failure Data

i	$\hat{p}_i$	Q–H		GM	
1	.006	.001	.027	.002	.017*
2	.013	.044	.037	.006	.027*
3	.022	.009	.060	.013	.039*
4	.034	.017	.067	.022	.054*
5	.067	.041	.107	.048	.092*
6	.077	.049	.119	.057	.104*
7	.106	.072	.152	.082	.136*
8	.136	.097	.186	.108	.168*
9	.199	.152	.256	.166	.236*
10	.341	.283	.405	.301	.384*

*Shorter interval.

Observaciones

1. Los intervalos pueden servir para determinar relaciones de orden entre las π_j.

2. Si la alternativa a celdas equiprobables es de la forma $H_1 : \pi_1 \leq \pi_2 \leq \ldots \leq \pi_K$ (pero no todas iguales), lo que se denomina *caso isotónico*, hay algunas propuestas, por ejemplo ver Lee (1977).

3. Los estadísticos
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(X_i - \widehat{\mu}_{io})^2}{\widehat{\mu}_{io}} \quad G^2 = 2 \sum_{i=1}^{K} X_i \log \frac{X_i}{\widehat{\mu}_{io}} .$$
son un caso particular del estadístico I^λ, $\lambda \in IR$ definido por Cressie y Read (1984) como
$$I^\lambda = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^{K} X_i \left\{ \left(\frac{X_i}{\widehat{\mu}_{io}} \right)^\lambda - 1 \right\} .$$
para $\lambda = 0, -1$ se definen por continuidad. Estos estadísticos están relacionados con las transformaciones de Box y Cox.

Observemos que $I^0 = G^2$, $I^1 = \chi^2$ y

$$I^{-2} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(X_i - \widehat{\mu}_{io})^2}{X_i} = W$$

4. En Cressie y Read (1988), libro en el que resumen muchas de las propiedades de estos estadísticos, prueban que $\forall \lambda \in IR$

$$I^{\lambda} = \chi^2 + o_p(1)$$

de manera que bajo $H_o : \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_o$ el test que rechaza si

$$I^{\lambda} \leq \chi^2_{\alpha, K-1}$$

es un test de nivel asintótico α.

En forma análoga, bajo similares condiciones a las ya vistas para el estadístico χ^2, se extiende al caso en que $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in IR^q$, comparando con el percentil de una χ^2_{K-1-q}.

Test Exacto de Fisher

Cuando las muestras son pequeñas sabemos que el test de χ^2 y G^2 no son bien aproximados por la distribución χ^2 y en consecuencia las conclusiones a las que llegamos a partir de los p–valores calculados no son confiables.

En ese sentido, el Tests Exacto de Fisher es una solución a este problema en el caso de tablas de 2×2.

El test exacto de Fisher se basa en evaluar la probabilidad asociada a cada una de las tablas 2 x 2 que se pueden formar manteniendo los mismos totales de filas y columnas que los de la tabla observada. Consideremos el caso de una tabla con marginales fijos

	B	B^c	
A	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
A^c	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
	n_{+1}	n_{+2}	n

Cuadro 18: Tabla tipo

Esto podría corresponder a una situación en la que se tiene una urna con n bolas, n_{1+} son de tipo A y n_{2+} son de tipo A^c. De ella se extraen n_{+1} bolas, entonces $(n_{11}, n_{21}, n_{12}, n_{22})$ son las bolas de cada tipo, A o A^c que están fuera (B) o dentro (B^c) de la urna. Como las marginales están dadas de antemano, la única variable independiente del problema es n_{11}, por ejemplo.

Si el tipo de bola y el hecho se salir de la caja son independientes, la probabilidad de que en la casilla (1,1) sean extraídas n_{11} bolas estaría dada por la distribución hipergeométrica:

$$\frac{\binom{n_{1+}}{n_{11}}\binom{n_{2+}}{n_{+1}-n_{11}}}{\binom{n}{n_{+1}}}$$

de modo que para poner a prueba esta hipótesis habrá que calcular la probabilidad de obtener una tabla como la observada o más extrema aún y tomar una decisión.

Notemos que aquí podemos escribir

$$\theta = \frac{n_{11}(n_{+2} - n_{1+} + n_{11})}{(n_{1+} - n_{11})(n_{+1} - n_{11})}$$

y que el caso de independencia corresponde a $\theta = 1$. Además, es importante observar que θ es función creciente de n_{11}.

Las hipótesis a testear será de la forma $H_0 : \theta = 1$ con alternativas $H_1 : \theta > 1$, $H_1 : \theta < 1$ o $H_1 : \theta \neq 1$.

Ejemplo 1:

Una compañera de trabajo de Fisher, la Señora Muriel Bristol, decía que podía discernir si en una taza de té se ponía primero la leche o el té.

Fisher diseñó un experimento para poner a prueba su habilidad. Se prepararon 8 tazas de té y se le presentaron a ella en orden aleatorio. En 4 se había puesto primero la leche y en otras 4 primero el té. La señora Muriel debía probar cada taza y daba su opinión.

La siguiente tabla presenta los resultados.

Se vertió primero	Muriel dice primero Té	Leche	n_{i+}
Té	3	1	4
Leche	1	3	4
n_{+j}	4	4	8

Cuadro 19: Resultados de Muriel

Muriel conocía estas cantidades. Por lo tanto, el total por filas fue fijado por el experimentador y el total por columnas por Muriel.

Bajo H_o: *Muriel no tiene habilidad* las 4 tazas que ella determinó como *Té primero* fueron elegidas al azar de las 8 que se le presentaron. Si ella elige 4 al azar, la probabilidad de que 3 de ellas sean verdaderamente *Té primero* es

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{16}{70} = 0.229$$

El p–valor es la probabilidad de observar un evento tan extremo como el observado o más aún. En este caso, sería que elijan las 4 tazas en las que se vertió primero té, es decir observar la tabla

Se vertió primero	Muriel dice primero Té	Leche	n_{i+}
Té	4	0	4
Leche	0	4	4
n_{+j}	4	4	8

Cuadro 20: Resultados de Muriel

que tiene probabilidad

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{4}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{70} = 0.014$$

Por lo tanto, el p–valor$=0.014 + 0.014 = 0.243$

Si bien no se rechaza la hipótesis nula, según la hija de Fisher, él se habia quedado impresionado por la habilidad de Muriel.

¿Qué ocurre si no tenemos todas las marginales fijas? Veamos que el test es aplicable como test condicional cuando tenemos un muestreo multinomial independiente

Ejemplo 2:

Consideremos el siguiente ejemplo en el que 13 individuos fueron operados de la rodilla.

Rodilla	Resultado: Muy Bueno	Resultado: Aceptable	n_{i+}
Directa	3	2	5
Girada	7	1	8
n_{+j}	10	3	13

Cuadro 21: Datos de Operación de Rodilla

Para estos datos, tenemos que el *valor observado del odds ratio* es

$$\theta = \frac{3 \times 1}{2 \times 7} = 0.2143$$

Si conociéramos los valores marginales, es claro que el valor de la primera casilla (podría ser cualquiera de ellas) determina los valores de los otros 3 casilleros:

	Resultado		n_{i+}
Rodilla	Muy Bueno	Aceptable	
Directa	3		5
Girada			8
n_{+j}	10	3	13

Cuadro 22: Datos de Operación de Rodilla

Si $\theta = 1$ tendríamos que la probabilidad de observar $n_{11} = 3$ sería

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{8}{7}}{\binom{13}{10}} = 0.27972$$

Si quisiéramos realizar un test para las hipótesis:

$$H_o : \theta = 1 \quad vs. \quad H_1 : \theta < 1$$

deberíamos computar las probabilidades de todas las tablas que tiene θ menor que el observado. Recordemos que θ es funciíon creciente de n_{11}, por ello las otras tablas favorables a H_1 serán aquellas con n_{11} menor al observado. En nuestro ejemplo hay sólo una posible:

	Resultado		n_{i+}
Rodilla	Muy Bueno	Aceptable	
Directa	2	3	5
Girada	8	0	8
n_{+j}	10	3	13

Cuadro 23: $\theta = 0$

con probabilidad

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{8}{8}}{\binom{13}{10}} = 0.03497$$

por lo tanto el p–valor sería

$$0.27972{+}0.03497{=}0.31469$$

Si quisiéramos realizar un test para las hipótesis:

$$H_o : \theta = 1 \quad vs. \quad H_1 : \theta > 1$$

deberíamos computar las probabilidades de todas las tablas que tiene θ mayor al observado. Con el mismo criterio que antes consideraremos las tablas con n_{11} mayor al observado, que en nuestro caso son

	Resultado		n_{i+}
Rodilla	Muy Bueno	Aceptable	
Directa	4	1	5
Girada	6	2	8
n_{+j}	10	3	13

Cuadro 24: $\theta = 1.33$

con probabilidad

$$\frac{\binom{5}{4}\binom{8}{6}}{\binom{13}{10}} = 0.489510$$

y

	Resultado		n_{i+}
Rodilla	Muy Bueno	Aceptable	
Directa	5	0	5
Girada	5	3	8
n_{+j}	10	3	13

Cuadro 25: $\theta = \infty$

con probabilidad

$$\frac{\binom{5}{5}\binom{8}{5}}{\binom{13}{10}} = 0.19580$$

por lo tanto el p–valor sería

$$0.27972+0.489510+0.19580= 0.96503$$

Lo más frecuente es que nos interese realizar un test bilateral, es decir que nos interese testear

$$H_o : \theta = 1 \quad vs. \quad H_1 : \theta \neq 1\,.$$

En este caso hay distintos criterios de como computar el p–valor. Un criterio posible para calcular el p–valor es el de sumar la probabilidad de todas las tablas cuya probabilidad es **menor o igual** a la observada.

Las Tablas 3 y 5 son las tablas que tienen la propiedad de tener probabilidad menor o igual a la tabla obervada (Tabla 1) con una probabilidad asociada igual a 0.03497 y 0.19580, respectivamente.

Por lo tanto el p–valor para el test bilateral sería:

$$0.27972+0.03497+0.19580=0.51047$$

Un ejemplo final: Bondad de Ajuste:

Edwards y Fraccaro (1960) presentan la siguiente tabla en la que se muestra el número de hijos varones dentro de los primeros 4 hijos en 3343 familias suecas con por lo menos 4 hijos.

	0	1	2	3	4	Total
Número de Familias	183	789	1250	875	246	3343

Cuadro 26: Familias Suecas

Definamos Y_i = número de familias con i varones, $i = 0, 1, \ldots, 4$, luego $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_4)$ sigue una distribución $M(3343, \boldsymbol{\pi})$, con $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \boldsymbol{\pi}_4)$.

Consideremos el modelo ω que postula:

i) una probabilidad η contante de nacimiento de varón, $0 < \eta < 1$.

ii) las determinaciones del sexo de los niños de una familia son eventos mutuamente independientes.

a) Hallemos $\pi_j(\eta)$ bajo ω

b) Testeemos $H_o : \boldsymbol{\pi} \in \omega \quad vs. \quad H_o : \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{S} - \omega$