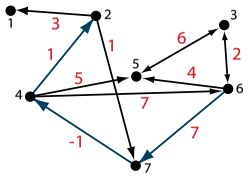
Problemas de camino mínimo

- Dado un grafo orientado $G = (V, E)$ con longitudes asociadas a sus aristas ($\ell : E \to \mathbb{R}$), la longitud (o peso o costo) de un camino es la suma de las longitudes de sus aristas.



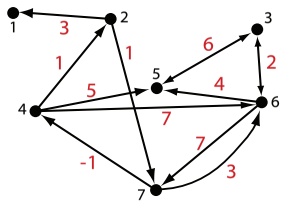
En el digrafo de la figura, la longitud del camino es 7.

- El problema del camino mínimo consiste en encontrar el camino de menor longitud...
  - de un vértice a otro
  - de un vértice a todos los demás
  - entre todos los pares de vértices.

Problemas de camino mínimo

- La distancia de v a w, $d(v, w)$, es la longitud de un camino mínimo entre v y w, $+\infty$ si no existe ningún camino de v a w, y $-\infty$ si existen caminos de v a w pero no uno mínimo.
- Observemos que en un grafo orientado no siempre vale $d(v, w) = d(w, v)$.

  Ej:



En el digrafo de la figura, $d(7, 4) = -1$ y $d(4, 7) = 2$.

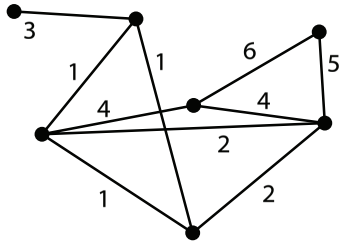
Problemas de camino mínimo

- Si G tiene un ciclo orientado de longitud negativa, no va a existir camino mínimo entre algunos pares de vértices, es decir, va a haber vértices a distancia $-\infty$.

- Si G no tiene ciclos orientados de longitud negativa (aunque pueda tener aristas de longitud negativa), para todo camino P existe P' simple con $\ell(P') \leq \ell(P)$. Como la cantidad de caminos simples en un grafo finito es finita, si existe un camino entre v y w, existe uno mínimo.

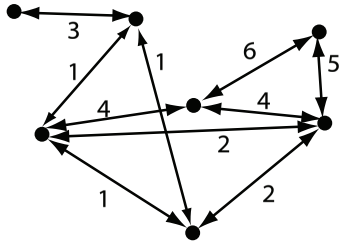
Problemas de camino mínimo

- Si G es no orientado, el problema de camino mínimo en G va a ser el mismo que en el digrafo que se obtiene reemplazando cada arista por dos orientadas una para cada lado y con la misma longitud que la original. En ese caso, aristas de longitud negativa implicarían ciclos negativos.



Problemas de camino mínimo

- Si G es no orientado, el problema de camino mínimo en G va a ser el mismo que en el digrafo que se obtiene reemplazando cada arista por dos orientadas una para cada lado y con la misma longitud que la original. En ese caso, aristas de longitud negativa implicarían ciclos negativos.



Problemas de camino mínimo

Principio de optimalidad

Todo subcamino de un camino mínimo es un camino mínimo.

Demo: Sea P un camino mínimo entre s y t y sea P_1 un subcamino de P, con extremos v y w. Si existe un camino P_1' en G entre v y w tal que $\ell(P_1') < \ell(P)$ entonces reemplazando P_1 por P_1' en P, obtendríamos un camino entre s y t de longitud menor que la de P, absurdo. □

Arbol de caminos mínimos

Propiedad

Si G no tiene aristas de costo negativo y s es un vértice de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un camino de s a v, entonces existe un árbol orientado T con raíz s tal que para todo $v \in V(G)$, el camino de s a v en T es un camino mínimo de s a v en G.

Arbol de caminos mínimos

Propiedad

Si G no tiene aristas de costo negativo y s es un vértice de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un camino de s a v, entonces existe un árbol orientado T con raíz s tal que para todo $v \in V(G)$, el camino de s a v en T es un camino mínimo de s a v en G.

Demo: Por inducción. Si $V(G) = \{s\}$, vale. Si $|V(G)| \geq 2$, para cada x, sea P_x un camino mínimo de s a x que con cantidad de aristas mínima. Sea v tal que para todo $v' \in V(G)$, $d(s, v') \leq d(s, v)$. Ante empates en la distancia, P_v es el que tiene más aristas.

Arbol de caminos mínimos

Propiedad

Si G no tiene aristas de costo negativo y s es un vértice de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un camino de s a v, entonces existe un árbol orientado T con raíz s tal que para todo $v \in V(G)$, el camino de s a v en T es un camino mínimo de s a v en G.

Demo: Por inducción. Si $V(G) = \{s\}$, vale. Si $|V(G)| \geq 2$, para cada x, sea P_x un camino mínimo de s a x que con cantidad de aristas mínima. Sea v tal que para todo $v' \in V(G)$, $d(s, v') \leq d(s, v)$. Ante empates en la distancia, P_v es el que tiene más aristas. Como no hay aristas de costo negativo y por la forma de elegir v y P_x, para todo v', v no pertenece a $P_{v'}$.

Arbol de caminos mínimos

Propiedad

Si G no tiene aristas de costo negativo y s es un vértice de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un camino de s a v, entonces existe un árbol orientado T con raíz s tal que para todo $v \in V(G)$, el camino de s a v en T es un camino mínimo de s a v en G.

Demo: Por inducción. Si $V(G) = \{s\}$, vale. Si $|V(G)| \geq 2$, para cada x, sea P_x un camino mínimo de s a x que con cantidad de aristas mínima. Sea v tal que para todo $v' \in V(G)$, $d(s, v') \leq d(s, v)$. Ante empates en la distancia, P_v es el que tiene más aristas. Como no hay aristas de costo negativo y por la forma de elegir v y P_x, para todo v', v no pertenece a $P_{v'}$. Por lo tanto, en $G - v$ existen caminos de s a todos los vértices.

Arbol de caminos mínimos

Propiedad

Si G no tiene aristas de costo negativo y s es un vértice de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un camino de s a v, entonces existe un árbol orientado T con raíz s tal que para todo $v \in V(G)$, el camino de s a v en T es un camino mínimo de s a v en G.

Demo: Por inducción. Si $V(G) = \{s\}$, vale. Si $|V(G)| \geq 2$, para cada x, sea P_x un camino mínimo de s a x que con cantidad de aristas mínima. Sea v tal que para todo $v' \in V(G)$, $d(s, v') \leq d(s, v)$. Ante empates en la distancia, P_v es el que tiene más aristas. Como no hay aristas de costo negativo y por la forma de elegir v y P_x, para todo v', v no pertenece a $P_{v'}$. Por lo tanto, en $G - v$ existen caminos de s a todos los vértices. Por hipótesis inductiva, existe T' árbol de caminos mínimos de $G - v$.

Arbol de caminos mínimos

Propiedad

Si G no tiene aristas de costo negativo y s es un vértice de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un camino de s a v, entonces existe un árbol orientado T con raíz s tal que para todo $v \in V(G)$, el camino de s a v en T es un camino mínimo de s a v en G.

Demo: Por inducción. Si $V(G) = \{s\}$, vale. Si $|V(G)| \geq 2$, para cada x, sea P_x un camino mínimo de s a x que con cantidad de aristas mínima. Sea v tal que para todo $v' \in V(G)$, $d(s, v') \leq d(s, v)$. Ante empates en la distancia, P_v es el que tiene más aristas. Como no hay aristas de costo negativo y por la forma de elegir v y P_x, para todo v', v no pertenece a $P_{v'}$. Por lo tanto, en $G - v$ existen caminos de s a todos los vértices. Por hipótesis inductiva, existe T' árbol de caminos mínimos de $G - v$. Sea w el anteúltimo vértice en P_v. Entonces $d(s, v) = d(s, w) + \ell(wv)$. Luego, agregando a T' el vértice v y la arista wv obtenemos un árbol de caminos mínimos de G. □

Arbol de caminos mínimos

La propiedad vale igual para grafos con aristas negativas pero sin ciclos negativos, aunque la demostración es distinta.

Algoritmo de Dijkstra & Moore

- Sirve para calcular un árbol de caminos mínimos desde un vértice s a todos los vértices alcanzables desde s.
- Funciona cuando el grafo no tiene aristas negativas.

- Input del algoritmo: grafo $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$, longitudes $\ell : E \to \mathbb{R}^+$.
- Output del algoritmo: árbol de caminos mínimos desde el vértice 1.

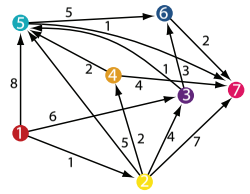
Algoritmo de Dijkstra & Moore

- Sirve para calcular un árbol de caminos mínimos desde un vértice s a todos los vértices alcanzables desde s.
- Funciona cuando el grafo no tiene aristas negativas.

- Input del algoritmo: grafo $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$, longitudes $\ell : E \to \mathbb{R}^+$.
- Output del algoritmo: árbol de caminos mínimos desde el vértice 1.

Algoritmo de Dijkstra & Moore

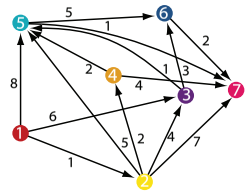
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \emptyset$
$\pi = [0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$
$P = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

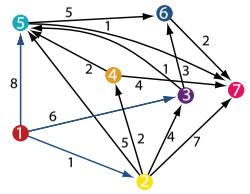
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1\}$
$\pi = [0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$
$P = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

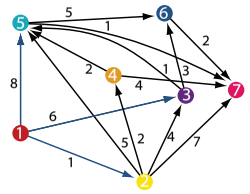
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1\}$
$\pi = [0, 1, 6, \infty, 8, \infty, \infty]$
$P = [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

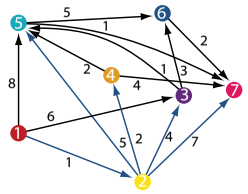
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2\}$
$\pi = [0, 1, 6, \infty, 8, \infty, \infty]$
$P = [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

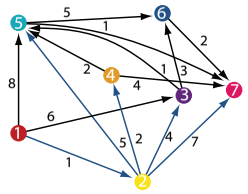
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 6, \infty, 8]$
$P = [1, 1, 2, 2, 2, 0, 2]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

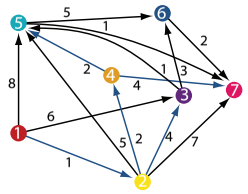
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 6, \infty, 8]$
$P = [1, 1, 2, 2, 2, 0, 2]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

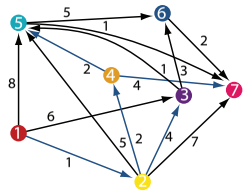
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, \infty, 7]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 0, 4]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

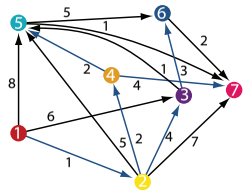
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4, 3\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, \infty, 7]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 0, 4]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

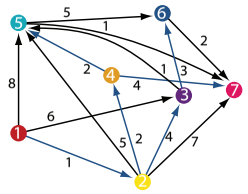
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4, 3\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, 8, 7]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 3, 4]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

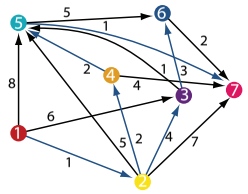
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4, 3, 5\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, 8, 7]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 3, 4]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

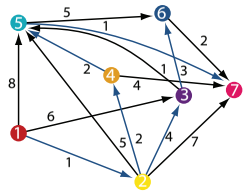
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
    Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
    $S = S \cup \{j\}$;
    Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
        Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
            $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
            $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4, 3, 5\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, 8, 6]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 3, 5]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

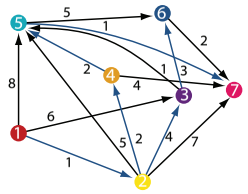
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4, 3, 5, 7\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, 8, 6]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 3, 5]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

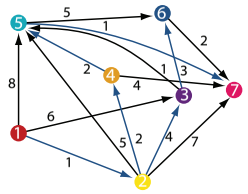
conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
  Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
  $S = S \cup \{j\}$;
  Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
    Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
      $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
      $P(i) = j$



$S = \{1, 2, 4, 3, 5, 7\}$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, 8, 6]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 3, 5]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

conjunto S; vectores π y P de longitud n;
$S = \emptyset$;
$\pi(1) = 0$; $\pi(i) = \infty$ para $2 \leq i \leq n$;
$P(1) = 1$; $P(i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$;
Mientras $S \neq V$
    Elegir $j \notin S$ tq $\pi(j) = \text{mín}_{i \notin S}\, \pi(i)$
    $S = S \cup \{j\}$;
    Para cada $i \in suc(j)$ tq $i \notin S$
        Si $\pi(i) > \pi(j) + \ell(ji)$
            $\pi(i) = \pi(j) + \ell(ji)$
            $P(i) = j$



$S = V$
$\pi = [0, 1, 5, 3, 5, 8, 6]$
$P = [1, 1, 2, 2, 4, 3, 5]$

Algoritmo de Dijkstra & Moore

- En cada iteración agrega un nuevo vértice a S, por lo tanto termina en n iteraciones.
- El costo de cada iteración es $O(n + d(j))$ u $O(\log n + d(j))$ según como se implemente S. Como j recorre V, el costo total del algoritmo es $O(n^2)$ u $O(m + n \log n)$, respectivamente.
- Notación: $\pi^*(i) = d(1, i)$; $\pi_S(i) =$ longitud del camino mínimo de 1 a i que sólo pasa por vértices de S.
- Lema: Al terminar cada iteración, para todo $i \in V$ vale:
  1. $i \in S \Rightarrow \pi(i) = \pi^*(i)$.
  2. $i \notin S \Rightarrow \pi(i) = \pi_S(i)$.
- Teorema: El algoritmo funciona.
  1. Termina.
  2. Cuando termina $S = V$, y por el lema, $\forall i \in V \quad \pi(i) = \pi^*(i)$.

Algoritmo de Dijkstra & Moore

- En cada iteración agrega un nuevo vértice a S, por lo tanto termina en n iteraciones.
- El costo de cada iteración es $O(n + d(j))$ u $O(\log n + d(j))$ según como se implemente S. Como j recorre V, el costo total del algoritmo es $O(n^2)$ u $O(m + n \log n)$, respectivamente.
- Notación: $\pi^*(i) = d(1, i)$; $\pi_S(i) =$ longitud del camino mínimo de 1 a i que sólo pasa por vértices de S.
- Lema: Al terminar cada iteración, para todo $i \in V$ vale:
  1. $i \in S \Rightarrow \pi(i) = \pi^*(i)$.
  2. $i \notin S \Rightarrow \pi(i) = \pi_S(i)$.
- Teorema: El algoritmo funciona.
  1. Termina.
  2. Cuando termina $S = V$, y por el lema, $\forall i \in V \quad \pi(i) = \pi^*(i)$.

Algoritmo de Dijkstra & Moore

- En cada iteración agrega un nuevo vértice a S, por lo tanto termina en n iteraciones.
- El costo de cada iteración es $O(n + d(j))$ u $O(\log n + d(j))$ según como se implemente S. Como j recorre V, el costo total del algoritmo es $O(n^2)$ u $O(m + n \log n)$, respectivamente.
- Notación: $\pi^*(i) = d(1, i)$; $\pi_S(i) =$ longitud del camino mínimo de 1 a i que sólo pasa por vértices de S.
- Lema: Al terminar cada iteración, para todo $i \in V$ vale:
  1. $i \in S \Rightarrow \pi(i) = \pi^*(i)$.
  2. $i \notin S \Rightarrow \pi(i) = \pi_S(i)$.
- Teorema: El algoritmo funciona.
  1. Termina.
  2. Cuando termina $S = V$, y por el lema, $\forall i \in V \;\; \pi(i) = \pi^*(i)$.

Algoritmo de Dijkstra & Moore

- En cada iteración agrega un nuevo vértice a S, por lo tanto termina en n iteraciones.
- El costo de cada iteración es $O(n + d(j))$ u $O(\log n + d(j))$ según como se implemente S. Como j recorre V, el costo total del algoritmo es $O(n^2)$ u $O(m + n \log n)$, respectivamente.
- Notación: $\pi^*(i) = d(1, i)$; $\pi_S(i) =$ longitud del camino mínimo de 1 a i que sólo pasa por vértices de S.
- Lema: Al terminar cada iteración, para todo $i \in V$ vale:
  1. $i \in S \Rightarrow \pi(i) = \pi^*(i)$.
  2. $i \notin S \Rightarrow \pi(i) = \pi_S(i)$.
- Teorema: El algoritmo funciona.
  1. Termina.
  2. Cuando termina $S = V$, y por el lema, $\forall i \in V \quad \pi(i) = \pi^*(i)$.

Algoritmo de Dijkstra & Moore

- En cada iteración agrega un nuevo vértice a S, por lo tanto termina en n iteraciones.
- El costo de cada iteración es $O(n + d(j))$ u $O(\log n + d(j))$ según como se implemente S. Como j recorre V, el costo total del algoritmo es $O(n^2)$ u $O(m + n \log n)$, respectivamente.
- Notación: $\pi^*(i) = d(1, i)$; $\pi_S(i) =$ longitud del camino mínimo de 1 a i que sólo pasa por vértices de S.
- Lema: Al terminar cada iteración, para todo $i \in V$ vale:
  1. $i \in S \Rightarrow \pi(i) = \pi^*(i)$.
  2. $i \notin S \Rightarrow \pi(i) = \pi_S(i)$.
- Teorema: El algoritmo funciona.
  1. Termina.
  2. Cuando termina $S = V$, y por el lema, $\forall i \in V \quad \pi(i) = \pi^*(i)$.

Demostración del lema

Por inducción en la cantidad de iteraciones. Como inicialmente $\pi(1) = 0$ y $\pi(i) = \infty$ para $i \neq 1$, luego de la primera iteración, $S = \{1\}$. Además, por como se actualizó π, vale $\pi(1) = 0 = \pi^*(1)$, $\pi(i) = \ell(1i) = \pi_S(i)$ para los sucesores de 1 y $\pi(i) = \infty = \pi_S(i)$ para el resto de los vértices.

Demostración del lema

Por inducción en la cantidad de iteraciones. Como inicialmente $\pi(1) = 0$ y $\pi(i) = \infty$ para $i \neq 1$, luego de la primera iteración, $S = \{1\}$. Además, por como se actualizó π, vale $\pi(1) = 0 = \pi^*(1)$, $\pi(i) = \ell(1i) = \pi_S(i)$ para los sucesores de 1 y $\pi(i) = \infty = \pi_S(i)$ para el resto de los vértices.

Supongamos por hipótesis inductiva que el lema vale para S y veamos que vale para $S \cup \{j\}$ luego de completar la siguiente iteración. Como π no se modifica para los elementos de S, vale $\pi(i) = \pi^*(i)$ para $i \in S$.

Falta probar entonces

1. $\pi(j) = \pi^*(j)$ y
2. $\pi(i) = \pi_{S \cup \{j\}}(i)$ para $i \notin S \cup \{j\}$.

Demostración del lema

1. $\pi(j) = \pi^*(j)$

Por HI sabíamos que $\pi(j) = \pi_S(j)$. Tomemos un camino P de 1 a j.[1] Sea i el primer vértice fuera de S en P (podría ser j), y sea P_i el subcamino de P que va de 1 a i. Como no hay aristas negativas, $\ell(P) \geq \ell(P_i) \geq \pi_S(i) \geq \pi_S(j)$ por HI y la forma de elegir j. Luego $\pi^*(j) = \pi_S(j) = \pi(j)$.

[1] Podemos considerar que existen todas las aristas pero algunas pesan ∞.

Demostración del lema

1. $\pi(j) = \pi^*(j)$

Por HI sabíamos que $\pi(j) = \pi_S(j)$. Tomemos un camino P de 1 a j.[1] Sea i el primer vértice fuera de S en P (podría ser j), y sea P_i el subcamino de P que va de 1 a i. Como no hay aristas negativas, $\ell(P) \geq \ell(P_i) \geq \pi_S(i) \geq \pi_S(j)$ por HI y la forma de elegir j. Luego $\pi^*(j) = \pi_S(j) = \pi(j)$.

2. $\pi(i) = \pi_{S\cup\{j\}}(i)$ para $i \notin S \cup \{j\}$

Sea $i \notin S$, $i \neq \{j\}$. Claramente, $\pi_{S\cup\{j\}}(i) \leq \text{mín}\{\pi_S(i), \pi^*(j) + \ell(ji)\}$. Veamos la desigualdad inversa.

[1] Podemos considerar que existen todas las aristas pero algunas pesan ∞.

Demostración del lema

1. $\pi(j) = \pi^*(j)$

Por HI sabíamos que $\pi(j) = \pi_S(j)$. Tomemos un camino P de 1 a j.[1] Sea i el primer vértice fuera de S en P (podría ser j), y sea P_i el subcamino de P que va de 1 a i. Como no hay aristas negativas, $\ell(P) \geq \ell(P_i) \geq \pi_S(i) \geq \pi_S(j)$ por HI y la forma de elegir j. Luego $\pi^*(j) = \pi_S(j) = \pi(j)$.

2. $\pi(i) = \pi_{S\cup\{j\}}(i)$ para $i \notin S \cup \{j\}$

Sea $i \notin S$, $i \neq \{j\}$. Claramente, $\pi_{S\cup\{j\}}(i) \leq \text{mín}\{\pi_S(i), \pi^*(j) + \ell(ji)\}$. Veamos la desigualdad inversa. Sea P un camino de 1 a i que sólo pasa por $S \cup \{j\}$. Sea v el último vértice antes de i en P. Si $v = j$, entonces $\ell(P) \geq \pi^*(j) + \ell(ji)$ $(*)$.

[1] Podemos considerar que existen todas las aristas pero algunas pesan ∞.

Demostración del lema

1. $\pi(j) = \pi^*(j)$

Por HI sabíamos que $\pi(j) = \pi_S(j)$. Tomemos un camino P de 1 a j.[1] Sea i el primer vértice fuera de S en P (podría ser j), y sea P_i el subcamino de P que va de 1 a i. Como no hay aristas negativas, $\ell(P) \geq \ell(P_i) \geq \pi_S(i) \geq \pi_S(j)$ por HI y la forma de elegir j. Luego $\pi^*(j) = \pi_S(j) = \pi(j)$.

2. $\pi(i) = \pi_{S\cup\{j\}}(i)$ para $i \notin S \cup \{j\}$

Sea $i \notin S$, $i \neq \{j\}$. Claramente, $\pi_{S\cup\{j\}}(i) \leq \text{mín}\{\pi_S(i), \pi^*(j) + \ell(ji)\}$. Veamos la desigualdad inversa. Sea P un camino de 1 a i que sólo pasa por $S \cup \{j\}$. Sea v el último vértice antes de i en P. Si $v = j$, entonces $\ell(P) \geq \pi^*(j) + \ell(ji)$ $(*)$. Si $v \in S$, sea P' el camino que se obtiene de reemplazar en P el subcamino de 1 a v por un camino de 1 a v de longitud $\pi^*(v)$ que sólo pase por S, que por HI sabemos que existe. Entonces $\ell(P) \geq \ell(P') \geq \pi_S(i)$ $(**)$.
Por $(*)$ y $(**)$, vale $\pi_{S\cup\{j\}}(i) \geq \text{mín}\{\pi_S(i), \pi^*(j) + \ell(ji)\}$. □

[1] Podemos considerar que existen todas las aristas pero algunas pesan ∞.

Algoritmo de Bellman & Ford

Algoritmo de Dantzig

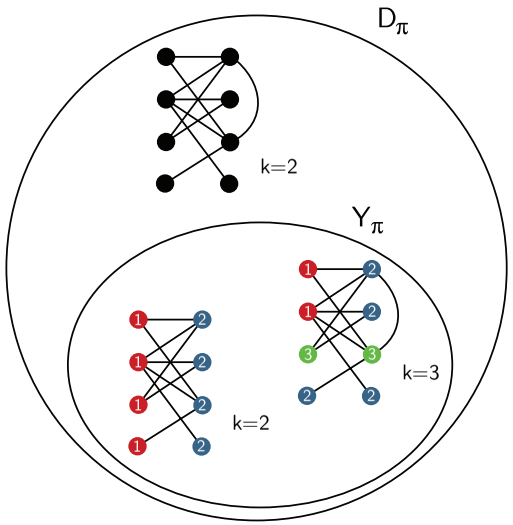
Algoritmo de Floyd

La teoría de NP-completitud

- Se aplica a problemas de decisión, o sea problemas que toman ciertos parámetros y tienen como respuesta SI o NO (aunque es sencillo ver que sus implicancias pueden extenderse a problemas de optimización).
- En el caso del problema de coloreo óptimo de un grafo, la variante de decisión se podría formular como: "Dado un grafo G y un número k, ¿existe un coloreo de G que utilice a lo sumo k colores?"
- Una instancia de un problema es una especificación de sus parámetros. Un problema de decisión π tiene asociado un conjunto D_π de instancias y un subconjunto $Y_\pi \subseteq D_\pi$ de instancias cuya respuesta es SI.

Ejemplo: coloreo

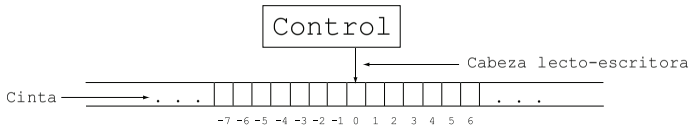
Dado un grafo G y un número k, ¿existe un coloreo de G que utilice a lo sumo k colores?



Modelos de Computadoras: DTM

Recordemos la noción de Máquina de Turing Determinística (DTM)

- Consiste de un control finito, una cabeza lecto-escritora y una cinta con el siguiente esquema.



- Σ finito, el alfabeto; $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- Q finito, el conjunto de estados;
- $q_0 \in Q$, estado inicial; $Q_f \subseteq Q$, estados finales (q_{si} y q_{no} para problemas de decisión)

Modelos de Computadoras: DTM

- Sobre la cinta tengo escrito el input que es un string de símbolos de Σ a partir de la celda 1, y el resto de las celdas tiene $*$ (blancos).
- Definimos un programa S como un conjunto de quíntuplas $S \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times M$, donde $M = \{+1, -1\}$ son los movimientos de la cabeza a derecha o izquierda.
- **Para todo par (q_i, s_j), existe exactamente una quíntupla que comienza con ese par (máquina determinística).**

Modelos de Computadoras: DTM

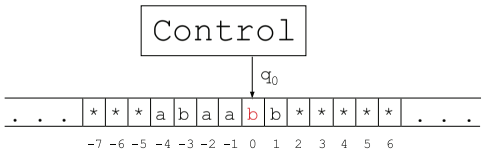
¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

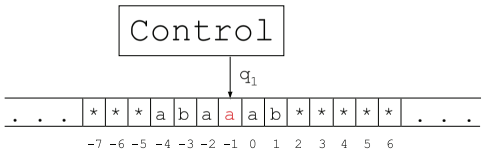


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

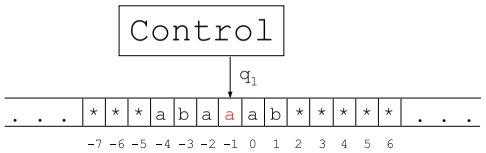


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

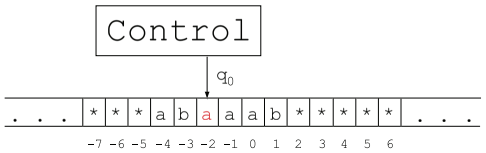


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

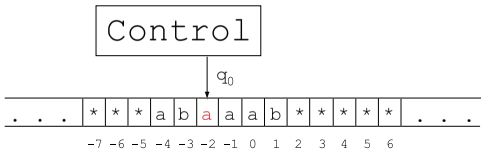


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

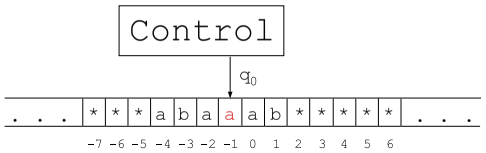


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

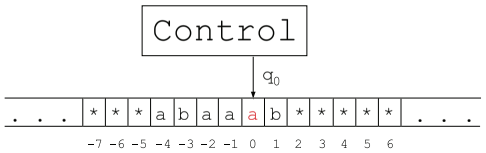


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

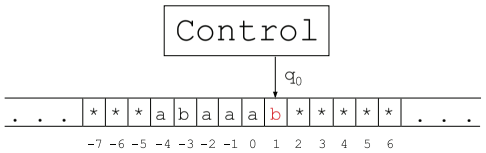


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

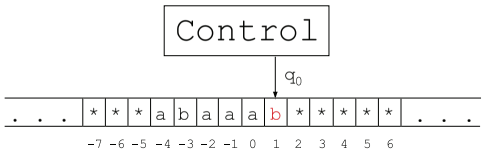


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

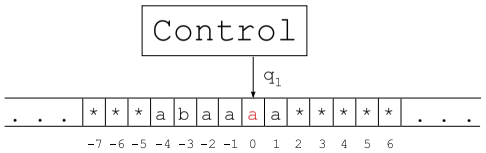


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

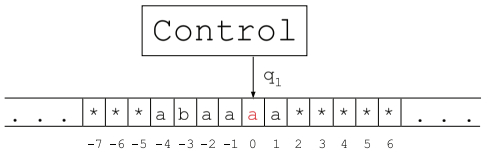


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

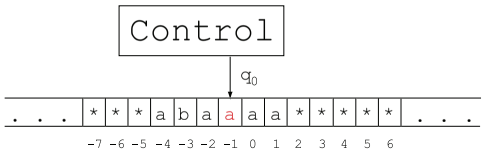


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

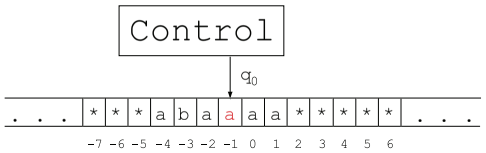


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

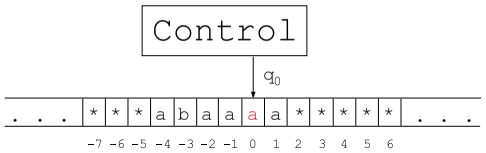


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

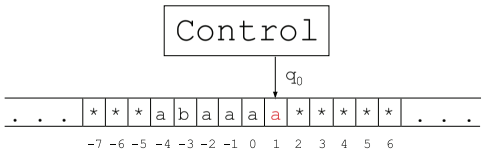


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

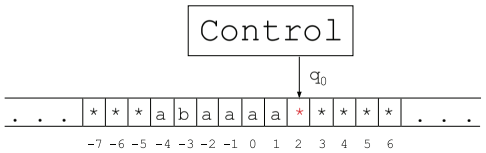


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

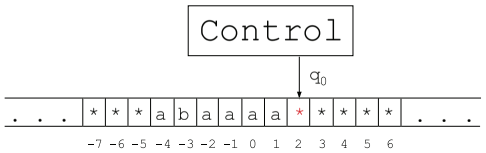


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

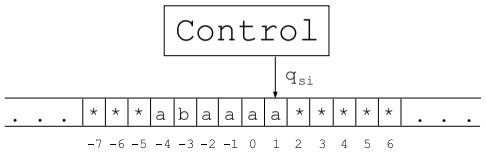


Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$



Modelos de Computadoras: DTM

- Una máquina M resuelve el problema π si para toda instancia empieza, termina y contesta bien (o sea, termina en el estado final correcto).
- La complejidad de una DTM está dada por la cantidad de movimientos de la cabeza, desde el estado inicial hasta alcanzar un estado final, en función del tamaño de la entrada.
  $T_M(n) = \text{máx}\{m \text{ tq } \exists x \in D_\pi, |x| = n \text{ y } M \text{ con input } x \text{ tarda } m\}$

Modelos de Computadoras: DTM

- Una máquina M resuelve el problema π si para toda instancia empieza, termina y contesta bien (o sea, termina en el estado final correcto).
- La complejidad de una DTM está dada por la cantidad de movimientos de la cabeza, desde el estado inicial hasta alcanzar un estado final, en función del tamaño de la entrada.
  $T_M(n) = \text{máx}\{m \text{ tq } \exists x \in D_\pi, |x| = n \text{ y } M \text{ con input } x \text{ tarda } m\}$

La clase P

- **Un problema está en P si existe una DTM de complejidad polinomial que lo resuelve.**

  P $= \{\pi$ tq $\exists M$ DTM tq M resuelve π y $T_M(n) \in O(p(n))$ para algún polinomio $p\}$

- Existen otros modelos de computadoras determinísticas (máquina de Turing con varias cintas, Random Access Machines, etc.) pero puede probarse que son equivalentes en términos de la polinomialidad de los problemas a la DTM.

La clase P

- **Un problema está en P si existe una DTM de complejidad polinomial que lo resuelve.**

  P $= \{\pi$ tq $\exists M$ DTM tq M resuelve π y $T_M(n) \in O(p(n))$ para algún polinomio $p\}$

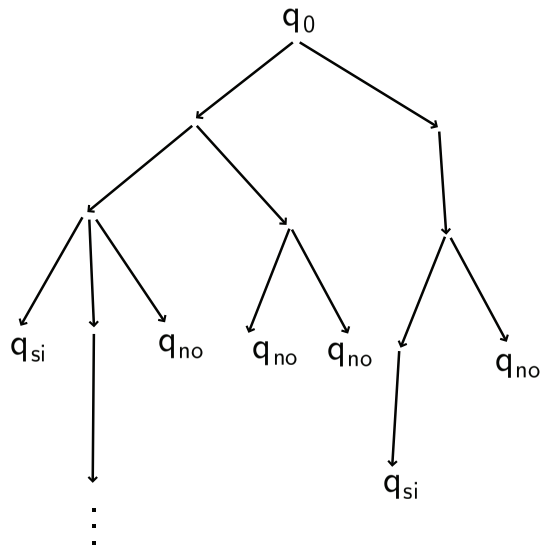
- Existen otros modelos de computadoras determinísticas (máquina de Turing con varias cintas, Random Access Machines, etc.) pero puede probarse que son equivalentes en términos de la polinomialidad de los problemas a la DTM.

Modelos de Computadoras: NDTM

Máquinas de Turing No Determinísticas (NDTM)

- **No se pide unicidad de la quíntupla que comienza con cualquier par (q_i, s_j).**
- En caso de que hubiera más de una quíntupla, la máquina se replica continuando cada una por una rama distinta.
- Decimos que una NDTM resuelve el problema π si para toda instancia de Y_π existe una rama que llega a un estado final q_{si} y para toda instancia en $D_\pi \setminus Y_\pi$ ninguna rama llega a un estado final q_{si}.

Modelos de Computadoras: NDTM



Modelos de Computadoras: NDTM

- Una NDTM es **polinomial** para π cuando existe una función polinomial $T(n)$ de manera que para toda instancia de Y_π de tamaño n, alguna de las ramas termina en estado q_{si} en a lo sumo $T(n)$ pasos.
- **Un problema $\pi \in$ NP si existe una NDTM polinomial que resuelve π.**
- Claramente, P $\subseteq$ NP.
- **Conjetura: P $\neq$ NP.**

  Todavía no se demostró que exista un problema en NP $\setminus$ P. Mientras tanto, se estudian clases de complejidad "relativa", es decir, que establecen orden de dificultad entre problemas.

Modelos de Computadoras: NDTM

- Una NDTM es **polinomial** para π cuando existe una función polinomial $T(n)$ de manera que para toda instancia de Y_π de tamaño n, alguna de las ramas termina en estado q_{si} en a lo sumo $T(n)$ pasos.
- **Un problema $\pi \in$ NP si existe una NDTM polinomial que resuelve π.**
- Claramente, P $\subseteq$ NP.
- **Conjetura: P $\neq$ NP.**

  Todavía no se demostró que exista un problema en NP $\setminus$ P. Mientras tanto, se estudian clases de complejidad "relativa", es decir, que establecen orden de dificultad entre problemas.

Modelos de Computadoras: NDTM

- Una NDTM es **polinomial** para π cuando existe una función polinomial $T(n)$ de manera que para toda instancia de Y_π de tamaño n, alguna de las ramas termina en estado q_{si} en a lo sumo $T(n)$ pasos.
- **Un problema $\pi \in$ NP si existe una NDTM polinomial que resuelve π.**
- Claramente, P $\subseteq$ NP.
- **Conjetura: P $\neq$ NP.**

  Todavía no se demostró que exista un problema en NP $\setminus$ P. Mientras tanto, se estudian clases de complejidad "relativa", es decir, que establecen orden de dificultad entre problemas.

Modelos de Computadoras: NDTM

- Una NDTM es **polinomial** para π cuando existe una función polinomial $T(n)$ de manera que para toda instancia de Y_π de tamaño n, alguna de las ramas termina en estado q_{si} en a lo sumo $T(n)$ pasos.
- **Un problema $\pi \in$ NP si existe una NDTM polinomial que resuelve π.**
- Claramente, P $\subseteq$ NP.
- **Conjetura: P $\neq$ NP.**

  Todavía no se demostró que exista un problema en NP $\setminus$ P. Mientras tanto, se estudian clases de complejidad "relativa", es decir, que establecen orden de dificultad entre problemas.

NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean π y π' dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \longrightarrow D_{\pi}$ es una reducción polinomial de π' en π si f se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema π es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema π verifica la condición 2., π es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean π y π' dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \to D_{\pi}$ es una reducción polinomial de π' en π si f se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema π es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema π verifica la condición 2., π es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean π y π' dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \to D_{\pi}$ es una reducción polinomial de π' en π si f se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema π es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema π verifica la condición 2., π es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean π y π' dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \to D_{\pi}$ es una reducción polinomial de π' en π si f se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema π es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema π verifica la condición 2., π es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean π y π' dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \to D_{\pi}$ es una reducción polinomial de π' en π si f se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema π es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema π verifica la condición 2., π es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean π y π' dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \to D_{\pi}$ es una reducción polinomial de π' en π si f se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema π es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema π verifica la condición 2., π es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

¿P $\neq$ NP? La pregunta del millón...

- **Si existe un problema en NP-c $\cap$ P, entonces P=NP.**
  - Si $\pi \in$ NP-c $\cap$ P, existe un algoritmo polinomial que resuelve π, por estar π en P. Por otro lado, como π es NP-completo, para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
  - Sea $\pi' \in$ NP. Apliquemos la reducción polinomial que transforma instancias de π' en instancias de π y luego el algoritmo polinomial que resuelve π. Por definición de reducción polinomial, es fácil ver que lo que se obtiene es un algoritmo polinomial que resuelve π'.
- Hasta el momento no se conoce ningún problema en NP-c $\cap$ P, así como tampoco se ha demostrado que un problema esté en NP $\setminus$ P. En ese caso, obviamente, se probaría que P $\neq$ NP.

¿P $\neq$ NP? La pregunta del millón...

- **Si existe un problema en NP-c $\cap$ P, entonces P=NP.**
  - Si $\pi \in$ NP-c $\cap$ P, existe un algoritmo polinomial que resuelve π, por estar π en P. Por otro lado, como π es NP-completo, para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
  - Sea $\pi' \in$ NP. Apliquemos la reducción polinomial que transforma instancias de π' en instancias de π y luego el algoritmo polinomial que resuelve π. Por definición de reducción polinomial, es fácil ver que lo que se obtiene es un algoritmo polinomial que resuelve π'.
- Hasta el momento no se conoce ningún problema en NP-c $\cap$ P, así como tampoco se ha demostrado que un problema esté en NP $\setminus$ P. En ese caso, obviamente, se probaría que P $\neq$ NP.

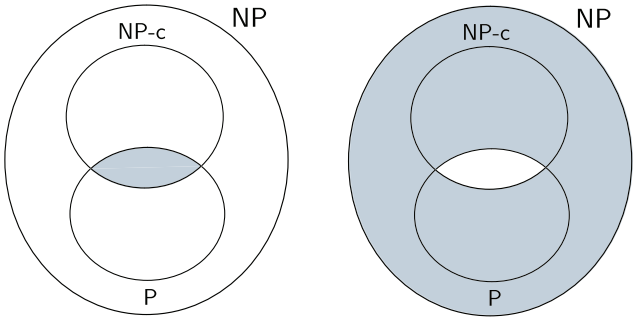
¿P $\neq$ NP? La pregunta del millón...

- **Si existe un problema en NP-c $\cap$ P, entonces P=NP.**
  - Si $\pi \in$ NP-c $\cap$ P, existe un algoritmo polinomial que resuelve π, por estar π en P. Por otro lado, como π es NP-completo, para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
  - Sea $\pi' \in$ NP. Apliquemos la reducción polinomial que transforma instancias de π' en instancias de π y luego el algoritmo polinomial que resuelve π. Por definición de reducción polinomial, es fácil ver que lo que se obtiene es un algoritmo polinomial que resuelve π'.
- Hasta el momento no se conoce ningún problema en NP-c $\cap$ P, así como tampoco se ha demostrado que un problema esté en NP $\setminus$ P. En ese caso, obviamente, se probaría que P $\neq$ NP.

¿P $\neq$ NP? La pregunta del millón...

- **Si existe un problema en NP-c $\cap$ P, entonces P=NP.**
  - Si $\pi \in$ NP-c $\cap$ P, existe un algoritmo polinomial que resuelve π, por estar π en P. Por otro lado, como π es NP-completo, para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
  - Sea $\pi' \in$ NP. Apliquemos la reducción polinomial que transforma instancias de π' en instancias de π y luego el algoritmo polinomial que resuelve π. Por definición de reducción polinomial, es fácil ver que lo que se obtiene es un algoritmo polinomial que resuelve π'.
- Hasta el momento no se conoce ningún problema en NP-c $\cap$ P, así como tampoco se ha demostrado que un problema esté en NP $\setminus$ P. En ese caso, obviamente, se probaría que P $\neq$ NP.

Esquema de clases



si P=NP... si P≠NP...

¿Cómo se prueba que un problema es NP-completo?

El problema SAT consiste en decidir si, dada una fórmula lógica φ expresada como conjunción de disyunciones (ej: $\varphi = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_3 \vee \neg x_4 \vee x_1)$), existe una valuación de sus variables que haga verdadera φ.

Teorema de Cook (1971): SAT es NP-completo.

La demostración de Cook es directa: considera un problema genérico $\pi \in \text{NP}$ y una instancia genérica $d \in D_\pi$. A partir de la hipotética NDTM que resuelve π, genera en tiempo polinomial una fórmula lógica $\varphi_{\pi,d}$ en forma normal (conjunción de disyunciones) tal que $d \in Y_\pi$ si y sólo si $\varphi_{\pi,d}$ es satisfactible.

¿Cómo se prueba que un problema es NP-completo?

A partir del Teorema de Cook, la técnica standard para probar que un problema π es NP-completo aprovecha la transitividad de $\preccurlyeq$, y consiste en lo siguiente:

1. Mostrar que π está en NP.
2. Elegir un problema π' apropiado que se sepa que es NP-completo.
3. Construir una reducción polinomial f de π' en π.

La segunda condición en la definición de problema NP-completo sale usando la transitividad: sea π'' un problema cualquiera de NP. Como π' es NP-completo, $\pi'' \preccurlyeq \pi'$. Como probamos que $\pi' \preccurlyeq \pi$, resulta $\pi'' \preccurlyeq \pi$.

¿Cómo se prueba que un problema es NP-completo?

A partir del Teorema de Cook, la técnica standard para probar que un problema π es NP-completo aprovecha la transitividad de $\preccurlyeq$, y consiste en lo siguiente:

1. Mostrar que π está en NP.
2. Elegir un problema π' apropiado que se sepa que es NP-completo.
3. Construir una reducción polinomial f de π' en π.

La segunda condición en la definición de problema NP-completo sale usando la transitividad: sea π'' un problema cualquiera de NP. Como π' es NP-completo, $\pi'' \preccurlyeq \pi'$. Como probamos que $\pi' \preccurlyeq \pi$, resulta $\pi'' \preccurlyeq \pi$.

Coloreo es NP-completo

A partir de un algoritmo de backtracking para coloreo es fácil construir una NDTM para el problema de coloreo, por lo tanto está en NP.

Para probar que coloreo es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a coloreo.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a construir un grafo G y determinar un número k de manera que φ sea satisfactible si y sólo si G se puede colorear con k-colores.

Coloreo es NP-completo

A partir de un algoritmo de backtracking para coloreo es fácil construir una NDTM para el problema de coloreo, por lo tanto está en NP.

Para probar que coloreo es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a coloreo.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a construir un grafo G y determinar un número k de manera que φ sea satisfactible si y sólo si G se puede colorear con k-colores.

Coloreo es NP-completo

A partir de un algoritmo de backtracking para coloreo es fácil construir una NDTM para el problema de coloreo, por lo tanto está en NP.

Para probar que coloreo es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a coloreo.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a construir un grafo G y determinar un número k de manera que φ sea satisfactible si y sólo si G se puede colorear con k-colores.

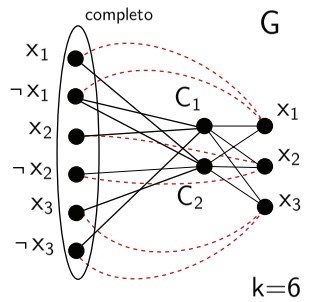
Reducción de SAT a coloreo

G tiene:

- V_1: un vértice por cada variable negada y afirmada, todos adyacentes entre si.
- V_2: un vértice por cada cláusula, adyacente a los literales de V_1 que no aparecen en la cláusula.
- V_3: otro vértice por cada variable, adyacente a todo V_2 y a los literales de V_1 correspondientes a otras variables.

k = dos veces la cantidad de variables.

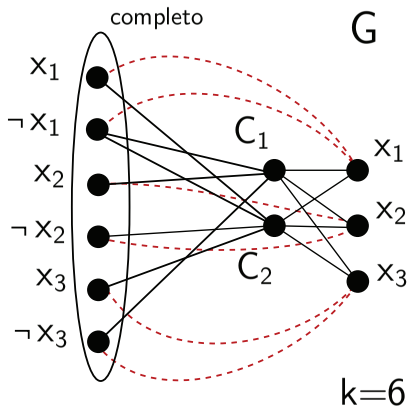
$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$



Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a coloreo.

Reducción de SAT a coloreo

$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$



Reducción de SAT a 3-SAT

El problema 3-SAT es una variante del problema SAT, en el cual cada cláusula tiene exactamente tres literales. Como es una restricción del dominio de SAT, está en NP, y en principio es "no más difícil" que SAT.

Para probar que 3-SAT es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a 3-SAT.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a reemplazar cada C_i por una conjunción de disyunciones φ'_i, donde cada disyunción tenga tres literales, y de manera que φ sea satisfactible si y sólo si $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ lo es.

Reducción de SAT a 3-SAT

El problema 3-SAT es una variante del problema SAT, en el cual cada cláusula tiene exactamente tres literales. Como es una restricción del dominio de SAT, está en NP, y en principio es "no más difícil" que SAT.

Para probar que 3-SAT es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a 3-SAT.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a reemplazar cada C_i por una conjunción de disyunciones φ'_i, donde cada disyunción tenga tres literales, y de manera que φ sea satisfactible si y sólo si $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ lo es.

Reducción de SAT a 3-SAT

El problema 3-SAT es una variante del problema SAT, en el cual cada cláusula tiene exactamente tres literales. Como es una restricción del dominio de SAT, está en NP, y en principio es "no más difícil" que SAT.

Para probar que 3-SAT es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a 3-SAT.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a reemplazar cada C_i por una conjunción de disyunciones φ_i', donde cada disyunción tenga tres literales, y de manera que φ sea satisfactible si y sólo si $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ lo es.

Reducción de SAT a 3-SAT

- Si C_i tiene tres literales, queda como está.
- C_i tiene menos de tres literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_1 \vee \neg x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg y)$$

- Si C_i tiene cuatro o más literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \rightarrow$$
$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$$

Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a 3-SAT.

Reducción de SAT a 3-SAT

- Si C_i tiene tres literales, queda como está.
- C_i tiene menos de tres literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_1 \vee \neg x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg y)$$

- Si C_i tiene cuatro o más literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \rightarrow$$

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$$

Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a 3-SAT.

Reducción de SAT a 3-SAT

- Si C_i tiene tres literales, queda como está.
- C_i tiene menos de tres literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_1 \vee \neg x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg y)$$

- Si C_i tiene cuatro o más literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \rightarrow$$

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$$

Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a 3-SAT.

Reducción de SAT a 3-SAT

- Si C_i tiene tres literales, queda como está.
- C_i tiene menos de tres literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_1 \vee \neg x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg y)$$

- Si C_i tiene cuatro o más literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \rightarrow$$

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$$

Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a 3-SAT.