Teoría de Grafos

Guillermo Durán

FCEyN, UBA / CONICET
gduran@dm.uba.ar

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
Diciembre 2008

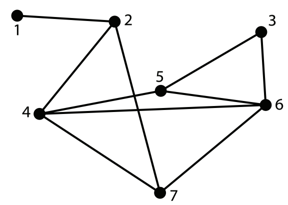
Programa

- Introducción a la teoría de grafos
- Problemas de camino mínimo
- Problemas de flujo máximo
- Grafos perfectos y sus variaciones

Unidad 1: Introducción a la teoría de grafos

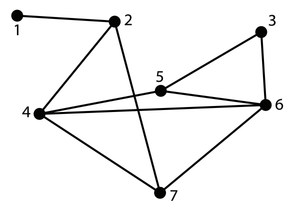
Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i, j).
- Notación:
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.



Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i,j).
- Notación:
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.



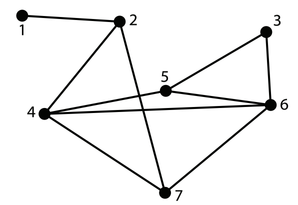
$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i, j).
- Notación:

  $n = n_G = |V(G)|$ y $m = m_G = |E(G)|$;

  $V_G = V(G)$, $E_G = E(G)$.
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.

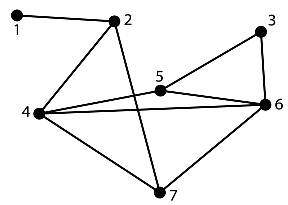


$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$

Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i, j).
- Notación:
  - $n = n_G = |V(G)|$ y $m = m_G = |E(G)|$;
  - $V_G = V(G)$, $E_G = E(G)$.
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.

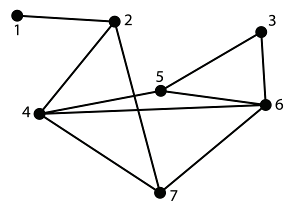


$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$

Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i, j).
- Notación:
  - $n = n_G = |V(G)|$ y $m = m_G = |E(G)|$;
  - $V_G = V(G)$, $E_G = E(G)$.
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.



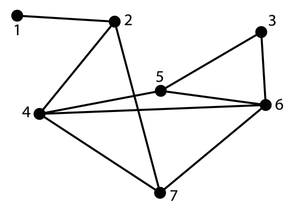
$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$

$n = 7$; $m = 10$.

Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i, j).
- Notación:
  - $n = n_G = |V(G)|$ y $m = m_G = |E(G)|$;
  - $V_G = V(G)$, $E_G = E(G)$.
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.



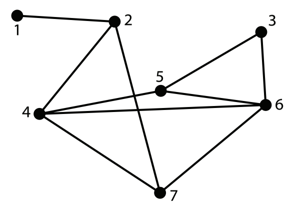
$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$

$n = 7$; $m = 10$.

Definiciones básicas

- Un grafo G está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G, llamados aristas, que se notan por ij o (i, j).
- Notación:
  - $n = n_G = |V(G)|$ y $m = m_G = |E(G)|$;
  - $V_G = V(G)$, $E_G = E(G)$.
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.



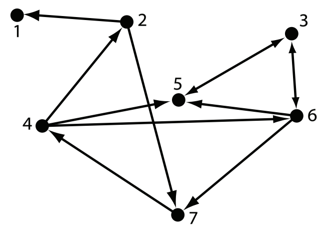
$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$

$n = 7$; $m = 10$.

Definiciones básicas

- Decimos que G es un digrafo, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vértices.



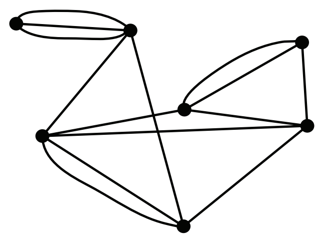
$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

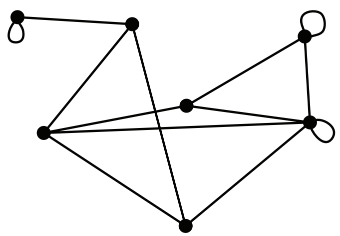
$E(G) = \{(2, 1), (4, 2), (2, 7), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (4, 6), (7, 4), (6, 5), (6, 7)\}$

$n = 7$; $m = 12$.

Definiciones básicas

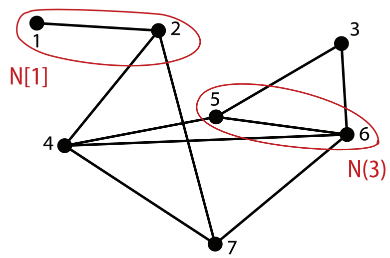
- Decimos que G es un multigrafo si se permite que entre un mismo par de vértices se trace más de una arista, y un pseudografo si se permiten aristas de tipo (v, v) (loops).





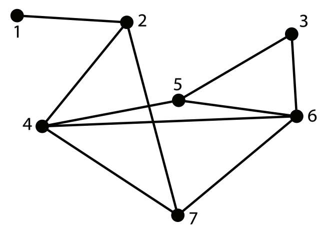
Vecindarios

- Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista.
- El vecindario de un vértice v en un grafo G es el conjunto $N_G(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v. El vecindario cerrado de v es $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- Notación: si queda claro por contexto, se usa $N(v)$ y $N[v]$.



Grado

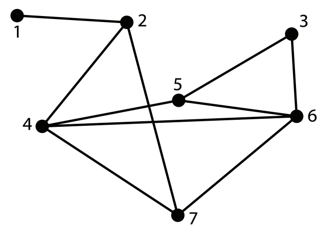
- El grado de un vértice v en G es la cardinalidad del conjunto $N_G(v)$ y se nota $d_G(v)$. Si no hay ambigüedad, se usa $d(v)$.
- Dado un grafo G, notamos $\delta(G)$ al grado mínimo y $\Delta(G)$ al grado máximo entre los vértices de G.



$d(2) = 3$

Grado

- El grado de un vértice v en G es la cardinalidad del conjunto $N_G(v)$ y se nota $d_G(v)$. Si no hay ambigüedad, se usa $d(v)$.
- Dado un grafo G, notamos $\delta(G)$ al grado mínimo y $\Delta(G)$ al grado máximo entre los vértices de G.



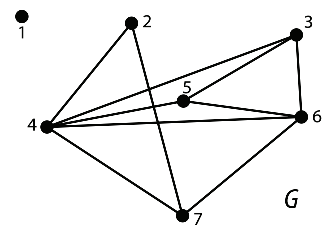
$d(2) = 3$

$\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 4$

Grado

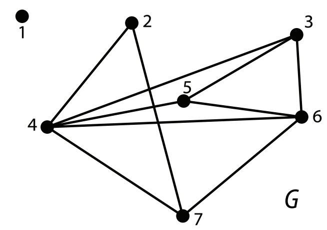
- Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$, o equivalentemente $d(v) = 0$.
- Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$, o equivalentemente $d(v) = n - 1$.



El vértice 1 es aislado en G.

Grado

- Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$, o equivalentemente $d(v) = 0$.
- Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$, o equivalentemente $d(v) = n - 1$.

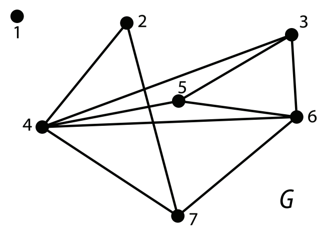


El vértice 1 es aislado en G.

El vértice 4 es universal en $G - \{1\}$.

Grado

- Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$, o equivalentemente $d(v) = 0$.
- Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$, o equivalentemente $d(v) = n - 1$.



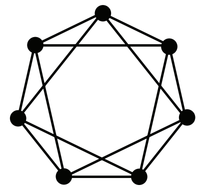
El vértice 1 es aislado en G.

El vértice 4 es universal en $G - \{1\}$.

Si G es no trivial y tiene un vértice aislado no puede tener también uno universal.

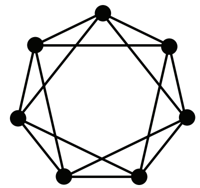
Grado

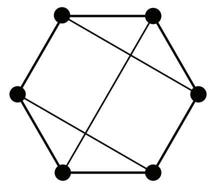
- Un grafo se dice regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.
- Un grafo se dice cúbico si todos sus vértices tienen grado tres.



Grado

- Un grafo se dice regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.
- Un grafo se dice cúbico si todos sus vértices tienen grado tres.





Grado

Teorema

$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m.$

Grado

Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$

Demo: Por inducción en m_G.

Grado

Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Demo: Por inducción en m_G. Si $m_G = 0$, entonces $d_G(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, y por lo tanto $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Grado

Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Demo: Por inducción en m_G. Si $m_G = 0$, entonces $d_G(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, y por lo tanto $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Supongamos $m_G > 0$, y consideremos G' obtenido a partir de G sacando una arista cualquiera (i, j).

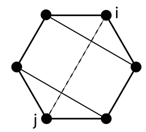
Grado

Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$

Demo: Por inducción en m_G. Si $m_G = 0$, entonces $d_G(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, y por lo tanto $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Supongamos $m_G > 0$, y consideremos G' obtenido a partir de G sacando una arista cualquiera (i, j). Entonces:

- $m_{G'} = m_G - 1$
- $d_{G'}(i) = d_G(i) - 1$ y $d_{G'}(j) = d_G(j) - 1$
- $d_{G'}(v) = d_G(v)$ si $v \neq i, j$

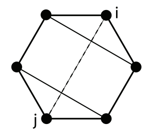


Grado

Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Demo: Por inducción en m_G. Si $m_G = 0$, entonces $d_G(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, y por lo tanto $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Supongamos $m_G > 0$, y consideremos G' obtenido a partir de G sacando una arista cualquiera (i, j). Entonces:



- $m_{G'} = m_G - 1$
- $d_{G'}(i) = d_G(i) - 1$ y $d_{G'}(j) = d_G(j) - 1$
- $d_{G'}(v) = d_G(v)$ si $v \neq i, j$

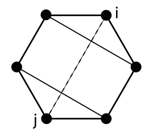
Por hipótesis inductiva, $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$. Luego $d_{G'}(i) + d_{G'}(j) + \sum_{v \in V(G'), v \neq i,j} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$.

Grado

Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Demo: Por inducción en m_G. Si $m_G = 0$, entonces $d_G(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, y por lo tanto $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Supongamos $m_G > 0$, y consideremos G' obtenido a partir de G sacando una arista cualquiera (i, j). Entonces:



- $m_{G'} = m_G - 1$
- $d_{G'}(i) = d_G(i) - 1$ y $d_{G'}(j) = d_G(j) - 1$
- $d_{G'}(v) = d_G(v)$ si $v \neq i, j$

Por hipótesis inductiva, $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$. Luego $d_{G'}(i) + d_{G'}(j) + \sum_{v \in V(G'), v \neq i,j} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$. Reemplazando, $d_G(i) - 1 + d_G(j) - 1 + \sum_{v \in V(G), v \neq i,j} d_G(v) = 2(m_G - 1)$. Es decir, $(\sum_{v \in V(G)} d(v)) - 2 = 2m_G - 2$ y por lo tanto $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m_G$. $\square$

Grado

Corolario

Todo grafo cúbico tiene un número par de vértices.

Grado

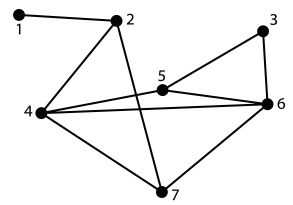
Corolario

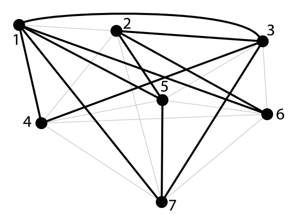
Todo grafo cúbico tiene un número par de vértices.

Demo: $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 3n$. Luego $2 \mid n$. $\square$

Complemento

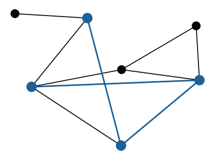
- El complemento de un grafo G, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no son adyacentes en G.





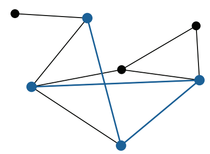
Subgrafos

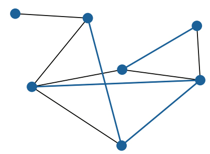
- Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.
- Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G.
- Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.
- Notación: Si $v \in V(G)$, $G - v$ denota el subgrafo de G inducido por $V(G) - \{v\}$.



Subgrafos

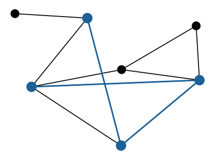
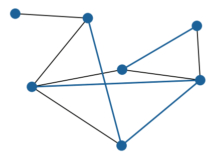
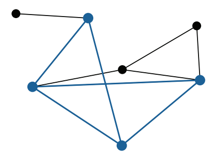
- Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.
- Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G.
- Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.
- Notación: Si $v \in V(G)$, $G - v$ denota el subgrafo de G inducido por $V(G) - \{v\}$.





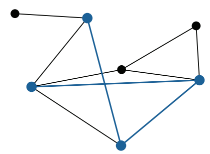
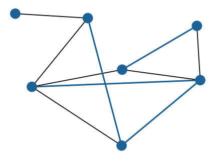
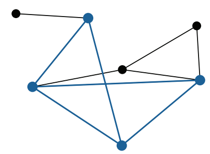
Subgrafos

- Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.
- Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G.
- Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.
- Notación: Si $v \in V(G)$, $G - v$ denota el subgrafo de G inducido por $V(G) - \{v\}$.

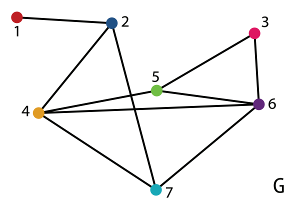
Subgrafos

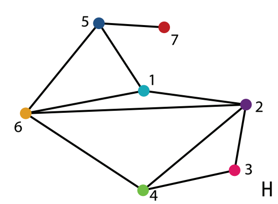
- Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.
- Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G.
- Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.
- Notación: Si $v \in V(G)$, $G - v$ denota el subgrafo de G inducido por $V(G) - \{v\}$.

Isomorfismo

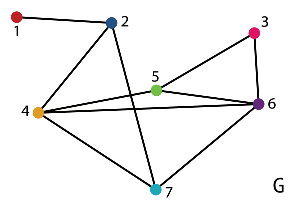
- Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.
- Más formalmente, G y H son isomorfos si existe $f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $(v, w) \in E(G)$ si y sólo si $(f(v), f(w)) \in E(H)$.
- El isomorfismo es una relación de equivalencia.

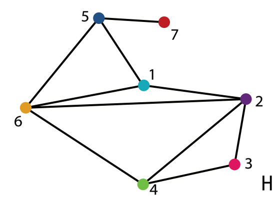




Isomorfismo

- Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.
- Más formalmente, G y H son isomorfos si existe $f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $(v, w) \in E(G)$ si y sólo si $(f(v), f(w)) \in E(H)$.
- El isomorfismo es una relación de equivalencia.

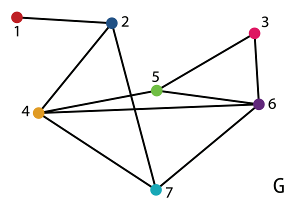


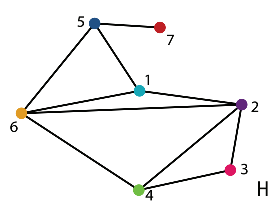


$f(1) = 7$
$f(2) = 5$
$f(3) = 3$
$f(4) = 6$
$f(5) = 4$
$f(6) = 2$
$f(7) = 1$

Isomorfismo

- Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.
- Más formalmente, G y H son isomorfos si existe $f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $(v, w) \in E(G)$ si y sólo si $(f(v), f(w)) \in E(H)$.
- El isomorfismo es una relación de equivalencia.

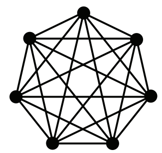




$f(1) = 7$
$f(2) = 5$
$f(3) = 3$
$f(4) = 6$
$f(5) = 4$
$f(6) = 2$
$f(7) = 1$

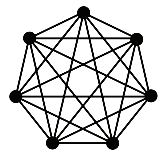
Grafos completos

- Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.
- K_3 se llama también triángulo.
- ¿Cuánto valen m_{K_n}, $\delta(K_n)$ y $\Delta(K_n)$?



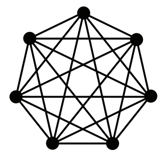
Grafos completos

- Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.
- K_3 se llama también triángulo.
- ¿Cuánto valen m_{K_n}, $\delta(K_n)$ y $\Delta(K_n)$?



Grafos completos

- Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.
- K_3 se llama también triángulo.
- ¿Cuánto valen m_{K_n}, $\delta(K_n)$ y $\Delta(K_n)$?



Caminos

- Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P.
- Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por P_k al camino inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{P_k}, $\delta(P_k)$ y $\Delta(P_k)$?

Caminos

- Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P.
- Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por P_k al camino inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{P_k}, $\delta(P_k)$ y $\Delta(P_k)$?

Caminos

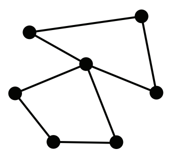
- Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P.
- Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por P_k al camino inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{P_k}, $\delta(P_k)$ y $\Delta(P_k)$?

Caminos

- Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P.
- Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por P_k al camino inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{P_k}, $\delta(P_k)$ y $\Delta(P_k)$?

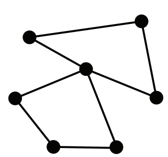
Circuitos y ciclos

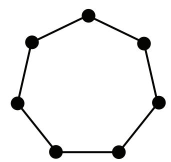
- Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Si $k \geq 3$ y $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, C se llama ciclo.
- Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ excepto (v_1, v_k).
- Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{C_k}, $\delta(C_k)$ y $\Delta(C_k)$?



Circuitos y ciclos

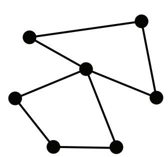
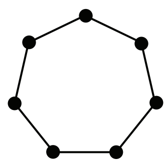
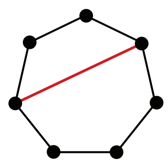
- Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Si $k \geq 3$ y $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, C se llama ciclo.
- Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ excepto (v_1, v_k).
- Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{C_k}, $\delta(C_k)$ y $\Delta(C_k)$?





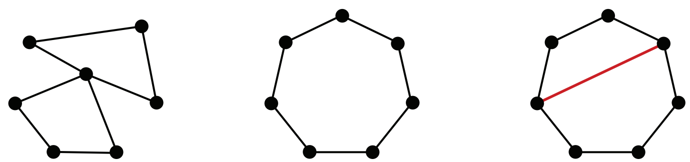
Circuitos y ciclos

- Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Si $k \geq 3$ y $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, C se llama ciclo.
- Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ excepto (v_1, v_k).
- Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{C_k}, $\delta(C_k)$ y $\Delta(C_k)$?

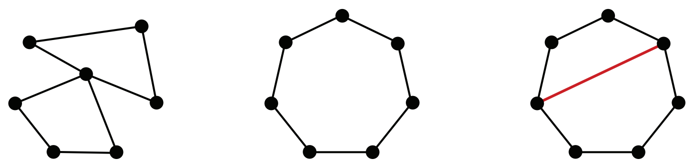
Circuitos y ciclos

- Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Si $k \geq 3$ y $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, C se llama ciclo.
- Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ excepto (v_1, v_k).
- Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{C_k}, $\delta(C_k)$ y $\Delta(C_k)$?



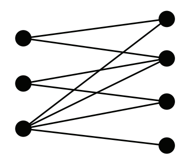
Circuitos y ciclos

- Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Si $k \geq 3$ y $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, C se llama ciclo.
- Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ excepto (v_1, v_k).
- Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido de k vértices.
- ¿Cuánto valen m_{C_k}, $\delta(C_k)$ y $\Delta(C_k)$?



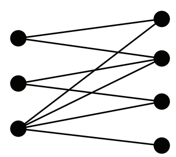
Grafos bipartitos completos

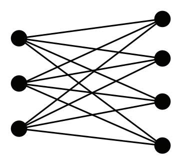
- Un grafo G es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 disjuntos, y toda arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.
- Un grafo G es bipartito completo si además todo vértice de V_1 es adyacente a todo vértice de V_2. Llamamos $K_{r,s}$ al grafo bipartito completo tal que $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$.
- ¿Cuánto valen $n_{K_{r,s}}$, $m_{K_{r,s}}$, $\delta(K_{r,s})$ y $\Delta(K_{r,s})$?



Grafos bipartitos completos

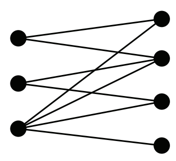
- Un grafo G es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 disjuntos, y toda arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.
- Un grafo G es bipartito completo si además todo vértice de V_1 es adyacente a todo vértice de V_2. Llamamos $K_{r,s}$ al grafo bipartito completo tal que $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$.
- ¿Cuánto valen $n_{K_{r,s}}$, $m_{K_{r,s}}$, $\delta(K_{r,s})$ y $\Delta(K_{r,s})$?

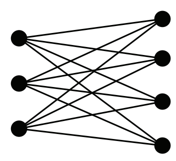




Grafos bipartitos completos

- Un grafo G es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 disjuntos, y toda arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.
- Un grafo G es bipartito completo si además todo vértice de V_1 es adyacente a todo vértice de V_2. Llamamos $K_{r,s}$ al grafo bipartito completo tal que $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$.
- ¿Cuánto valen $n_{K_{r,s}}$, $m_{K_{r,s}}$, $\delta(K_{r,s})$ y $\Delta(K_{r,s})$?





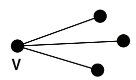
Teorema

Si un grafo tiene 6 o más vértices, entonces el grafo o su complemento tienen un triángulo.

Teorema

Si un grafo tiene 6 o más vértices, entonces el grafo o su complemento tienen un triángulo.

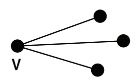
Demo: Sea $v \in V(G)$. Como $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1 \geq 5$, podemos asumir s.p.g. que $d_G(v) \geq 3$.



Teorema

Si un grafo tiene 6 o más vértices, entonces el grafo o su complemento tienen un triángulo.

Demo: Sea $v \in V(G)$. Como $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1 \geq 5$, podemos asumir s.p.g. que $d_G(v) \geq 3$.

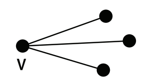


Si hay dos vértices adyacentes w y z en $N_G(v)$, entonces v, w, z forman un triángulo.

Teorema

Si un grafo tiene 6 o más vértices, entonces el grafo o su complemento tienen un triángulo.

Demo: Sea $v \in V(G)$. Como $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1 \geq 5$, podemos asumir s.p.g. que $d_G(v) \geq 3$.



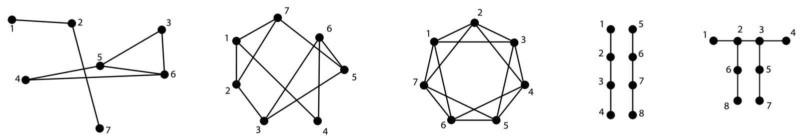
Si hay dos vértices adyacentes w y z en $N_G(v)$, entonces v, w, z forman un triángulo. Si no hay dos vértices adyacentes en $N_G(v)$, entonces $N_G(v)$ induce un subgrafo completo en $\bar{G}$, y como $|N_G(v)| \geq 3$, $\bar{G}$ contiene un triángulo. $\square$

Conexión

- Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w.
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?

Conexión

- Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w.
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?



Conexión

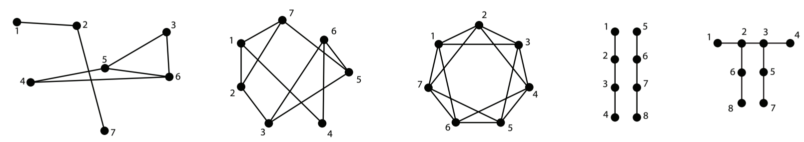
- Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si S satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.
- Una componente conexa de un grafo es un subgrafo conexo maximal.
- ¿Cuáles son las componentes conexas de estos grafos?

Conexión

- Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si S satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.
- Una componente conexa de un grafo es un subgrafo conexo maximal.
- ¿Cuáles son las componentes conexas de estos grafos?

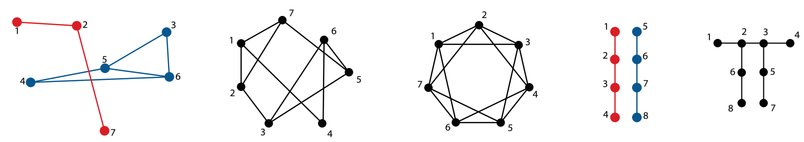
Conexión

- Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si S satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.
- Una componente conexa de un grafo es un subgrafo conexo maximal.
- ¿Cuáles son las componentes conexas de estos grafos?



Conexión

- Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si S satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.
- Una componente conexa de un grafo es un subgrafo conexo maximal.
- ¿Cuáles son las componentes conexas de estos grafos?



Conexión

Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

Conexión

Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

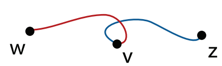
Demo de 3.: Supongamos que $v \in G_1 \cap G_2$.

Conexión

Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

Demo de 3.: Supongamos que $v \in G_1 \cap G_2$. Entonces para todo par de vértices w, z de $G_1 \cup G_2$ existe un camino de w a v y un camino de v a z (de longitud cero si alguno es v).

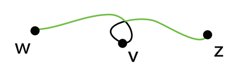


Conexión

Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

Demo de 3.: Supongamos que $v \in G_1 \cap G_2$. Entonces para todo par de vértices w, z de $G_1 \cup G_2$ existe un camino de w a v y un camino de v a z (de longitud cero si alguno es v).



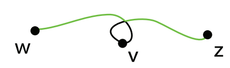
De la union de esos dos caminos se puede extraer un camino simple de w a z.

Conexión

Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

Demo de 3.: Supongamos que $v \in G_1 \cap G_2$. Entonces para todo par de vértices w, z de $G_1 \cup G_2$ existe un camino de w a v y un camino de v a z (de longitud cero si alguno es v).



De la union de esos dos caminos se puede extraer un camino simple de w a z. Por lo tanto $G_1 \cup G_2$ es un subgrafo conexo, pero como G_1 y G_2 eran maximales, resulta $G_1 = G_2 = G_1 \cup G_2$. $\square$

Distancia

- La longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen.
- La distancia entre dos vértices v y w en G es la longitud del camino más corto entre v y w y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.

  ¿Cuál es la distancia entre 1 y 5?
- El disco $D_k(v)$ de centro v y radio k ($k \geq 0$) es el conjunto de vértices de G que están a distancia menor o igual que k de v.

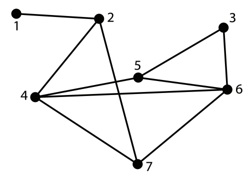
  ¿Cuáles son los discos con centro 1 en este grafo?

Distancia

- La longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen.
- La distancia entre dos vértices v y w en G es la longitud del camino más corto entre v y w y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.

  ¿Cuál es la distancia entre 1 y 5?
- El disco $D_k(v)$ de centro v y radio k ($k \geq 0$) es el conjunto de vértices de G que están a distancia menor o igual que k de v.

  ¿Cuáles son los discos con centro 1 en este grafo?

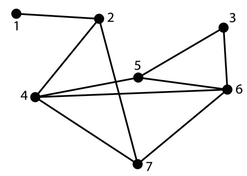


Distancia

- La longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen.
- La distancia entre dos vértices v y w en G es la longitud del camino más corto entre v y w y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.

  ¿Cuál es la distancia entre 1 y 5?
- El disco $D_k(v)$ de centro v y radio k ($k \geq 0$) es el conjunto de vértices de G que están a distancia menor o igual que k de v.

  ¿Cuáles son los discos con centro 1 en este grafo?

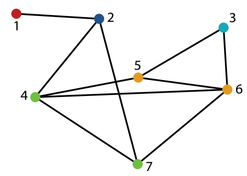


Distancia

- La longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen.
- La distancia entre dos vértices v y w en G es la longitud del camino más corto entre v y w y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.

  ¿Cuál es la distancia entre 1 y 5?
- El disco $D_k(v)$ de centro v y radio k ($k \geq 0$) es el conjunto de vértices de G que están a distancia menor o igual que k de v.

  ¿Cuáles son los discos con centro 1 en este grafo?

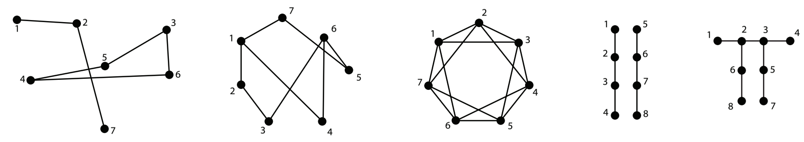


Grafos bipartitos

- Un grafo G es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 disjuntos, y toda arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son bipartitos?

Grafos bipartitos

- Un grafo G es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 disjuntos, y toda arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son bipartitos?



Teorema

Un grafo G es bipartito $\Leftrightarrow$ todos sus circuitos son pares.

Teorema

Un grafo G es bipartito $\Leftrightarrow$ todos sus circuitos son pares.

Demo:

$\Rightarrow$) Sabemos que $V(G) = V_1 \cup V_2$ y toda arista va de V_1 a V_2. Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un circuito en G. Si $v_1 \in V_1$ entonces los vértices de subíndice par tienen que pertenecer a V_2 y los de subíndice impar a V_1. Como v_n es adyacente a v_1, n tiene que ser par.

Teorema

Un grafo G es bipartito $\Leftrightarrow$ todos sus circuitos son pares.

Demo:

$\Rightarrow$) Sabemos que $V(G) = V_1 \cup V_2$ y toda arista va de V_1 a V_2. Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un circuito en G. Si $v_1 \in V_1$ entonces los vértices de subíndice par tienen que pertenecer a V_2 y los de subíndice impar a V_1. Como v_n es adyacente a v_1, n tiene que ser par.

$\Leftarrow$) Sea v en $V(G)$. Definimos V_1 y V_2 como los vértices que están a distancia impar o par de v, respectivamente. Supongamos que no es una bipartición, o sea, existen z y w que están a ambos a distancia par o impar de v y son adyacentes. Como la diferencia entre las distancias es a lo sumo 1, entonces están a la misma distancia. Sea v' el primer vértice en común entre los caminos mínimos de w a v y de z a v. La longitud de los sub-caminos de w a v' y de z a v' tiene que ser la misma. Entonces esos sub-caminos y la arista wz forman un ciclo impar. $\square$

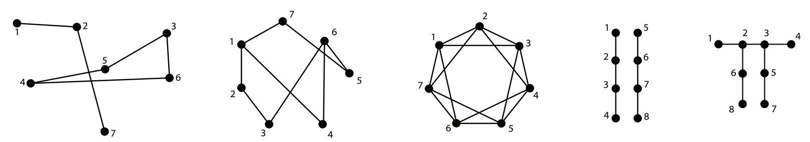
Conexión

- Un punto de corte de un grafo G es un vértice v tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que G.
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?

- Un grafo es biconexo si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?

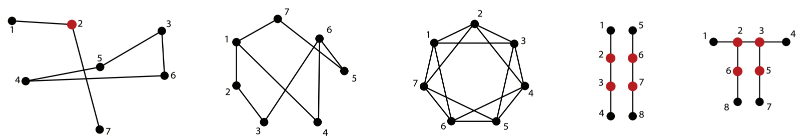
Conexión

- Un punto de corte de un grafo G es un vértice v tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que G.
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?
- Un grafo es biconexo si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?



Conexión

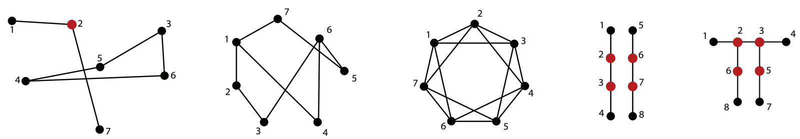
- Un punto de corte de un grafo G es un vértice v tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que G.
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?
- Un grafo es biconexo si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?



Conexión

- Un punto de corte de un grafo G es un vértice v tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que G.
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?

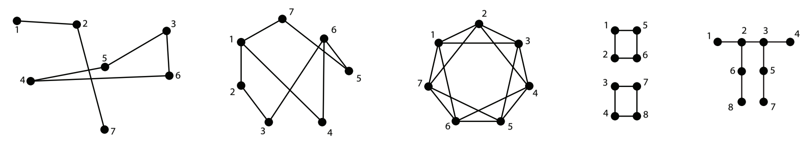
- Un grafo es biconexo si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?



Conexión

- Un punto de corte de un grafo G es un vértice v tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que G.
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?

- Un grafo es biconexo si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?

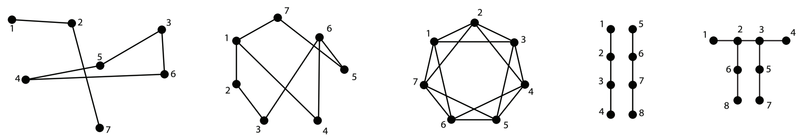


Conexión

- Un bloque o componente biconexa de un grafo es un subgrafo biconexo maximal.
- ¿Cuáles son los bloques en estos grafos?

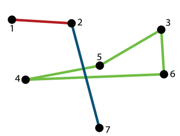
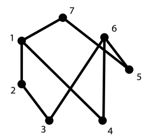
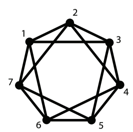
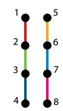
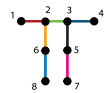
Conexión

- Un bloque o componente biconexa de un grafo es un subgrafo biconexo maximal.
- ¿Cuáles son los bloques en estos grafos?



Conexión

- Un bloque o componente biconexa de un grafo es un subgrafo biconexo maximal.
- ¿Cuáles son los bloques en estos grafos?

Conexión

Observaciones

1. Un grafo es biconexo si y sólo si tiene un solo bloque.
2. Dos bloques de un grafo comparten a lo sumo un vértice. En particular, cada arista pertenece a un único bloque.

Teorema

Sea G conexo y sea v un vértice de G. Son equivalentes:

1. El vértice v es un punto de corte de G.
2. Existen vértices u y w distintos de v tales que v está en todo camino entre u y w.
3. Existe una partición de $V - v$ en U y W tal que para todo u en U y para todo w en W, el punto v está en todo camino entre u y w.

Teorema

Sea G conexo y sea v un vértice de G. Son equivalentes:

1. El vértice v es un punto de corte de G.
2. Existen vértices u y w distintos de v tales que v está en todo camino entre u y w.
3. Existe una partición de $V - v$ en U y W tal que para todo u en U y para todo w en W, el punto v está en todo camino entre u y w.

Demo: $1 \Rightarrow 3$) Si v es punto de corte $\Rightarrow G - v$ es disconexo. Sea U una componente conexa de $G - v$ y W los vértices restantes. Sean $u \in U$ y $w \in W$; como están en componentes conexas distintas de $G - v$, todo camino en G entre ellos contiene a v.

Teorema

Sea G conexo y sea v un vértice de G. Son equivalentes:

1. El vértice v es un punto de corte de G.
2. Existen vértices u y w distintos de v tales que v está en todo camino entre u y w.
3. Existe una partición de $V - v$ en U y W tal que para todo u en U y para todo w en W, el punto v está en todo camino entre u y w.

Demo: $1 \Rightarrow 3$) Si v es punto de corte $\Rightarrow G - v$ es disconexo. Sea U una componente conexa de $G - v$ y W los vértices restantes. Sean $u \in U$ y $w \in W$; como están en componentes conexas distintas de $G - v$, todo camino en G entre ellos contiene a v.
$3 \Rightarrow 2$) Tomamos u en U y w en W.

Teorema

Sea G conexo y sea v un vértice de G. Son equivalentes:

1. El vértice v es un punto de corte de G.
2. Existen vértices u y w distintos de v tales que v está en todo camino entre u y w.
3. Existe una partición de $V - v$ en U y W tal que para todo u en U y para todo w en W, el punto v está en todo camino entre u y w.

Demo: $1 \Rightarrow 3$) Si v es punto de corte $\Rightarrow G - v$ es disconexo. Sea U una componente conexa de $G - v$ y W los vértices restantes. Sean $u \in U$ y $w \in W$; como están en componentes conexas distintas de $G - v$, todo camino en G entre ellos contiene a v.
$3 \Rightarrow 2$) Tomamos u en U y w en W.
$2 \Rightarrow 1$) Si v está en todo camino de u a w, entonces no existe un camino entre u y w en $G - v$. Por lo tanto $G - v$ no es conexo, y v es punto de corte de G. □

Conexión

- Un puente de un grafo G es una arista e tal que $G - e$ tiene más componentes conexas que G.
- Sea G conexo, v un punto de corte y e un puente. ¿Puede ser que $G - v$ tenga más de dos componentes conexas? ¿Y $G - e$?
- ¿Existe algún grafo biconexo que tenga un puente?

Conexión

- Un puente de un grafo G es una arista e tal que $G - e$ tiene más componentes conexas que G.
- Sea G conexo, v un punto de corte y e un puente. ¿Puede ser que $G - v$ tenga más de dos componentes conexas? ¿Y $G - e$?
- ¿Existe algún grafo biconexo que tenga un puente?

Conexión

- Un puente de un grafo G es una arista e tal que $G - e$ tiene más componentes conexas que G.
- Sea G conexo, v un punto de corte y e un puente. ¿Puede ser que $G - v$ tenga más de dos componentes conexas? ¿Y $G - e$?
- ¿Existe algún grafo biconexo que tenga un puente?

Conexión

- Un puente de un grafo G es una arista e tal que $G - e$ tiene más componentes conexas que G.
- Sea G conexo, v un punto de corte y e un puente. ¿Puede ser que $G - v$ tenga más de dos componentes conexas? ¿Y $G - e$?
- ¿Existe algún grafo biconexo que tenga un puente?

  Rta: Sólo el grafo formado por una única arista. Si $e = vw$ es un puente en G, entonces las componentes conexas de $G - e$ son G_1 y G_2, donde $v \in G_1$ y $w \in G_2$. Notemos que v es punto de corte en G salvo que $G_1 = \{v\}$ y w es punto de corte en G salvo que $G_2 = \{w\}$. Entonces, si G es biconexo, $V(G) = \{v, w\}$ y $E(G) = \{e\}$. $\square$

Teorema

Sea G conexo y sea $e = ij$ una arista de G. Son equivalentes:

1. La arista e es un puente de G.
2. La arista e no está en ningún ciclo de G.
3. Existen vértices u y v tales que e está en todo camino entre u y v.

Teorema

Sea G conexo y sea $e = ij$ una arista de G. Son equivalentes:

1. La arista e es un puente de G.
2. La arista e no está en ningún ciclo de G.
3. Existen vértices u y v tales que e está en todo camino entre u y v.

Demo: $1 \Rightarrow 2$) Si e está en un ciclo C, entonces $C - e$ es un camino P entre i y j. En cualquier camino entre dos vértices u y v, la arista e podría ser reemplazada por el camino P. Luego e no es puente.

Teorema

Sea G conexo y sea $e = ij$ una arista de G. Son equivalentes:

1. La arista e es un puente de G.
2. La arista e no está en ningún ciclo de G.
3. Existen vértices u y v tales que e está en todo camino entre u y v.

Demo: $1 \Rightarrow 2$) Si e está en un ciclo C, entonces $C - e$ es un camino P entre i y j. En cualquier camino entre dos vértices u y v, la arista e podría ser reemplazada por el camino P. Luego e no es puente.
$2 \Rightarrow 3$) Sean i y j los extremos de e. Si para todo par de vértices u, v existe un camino que los une y no pasa por e, en particular existe un camino P entre i y j que no usa e. Pero entonces $P \cup e$ es un ciclo.

Teorema

Sea G conexo y sea $e = ij$ una arista de G. Son equivalentes:

1. La arista e es un puente de G.
2. La arista e no está en ningún ciclo de G.
3. Existen vértices u y v tales que e está en todo camino entre u y v.

Demo: $1 \Rightarrow 2$) Si e está en un ciclo C, entonces $C - e$ es un camino P entre i y j. En cualquier camino entre dos vértices u y v, la arista e podría ser reemplazada por el camino P. Luego e no es puente.
$2 \Rightarrow 3$) Sean i y j los extremos de e. Si para todo par de vértices u, v existe un camino que los une y no pasa por e, en particular existe un camino P entre i y j que no usa e. Pero entonces $P \cup e$ es un ciclo.
$3 \Rightarrow 1$) Si e está en todo camino de u a v, entonces no existe un camino entre u y v en $G - e$. Por lo tanto $G - e$ no es conexo, y e es un puente de G. $\square$