

---

# INVESTIGACIÓN OPERATIVA

## Segundo Cuatrimestre — 2015

### Práctica 4: Grafos

---

1. Supongamos que se tienen cuatro aulas y las siguientes materias con sus respectivos horarios para un mismo día:

Álgebra I	8 a 12 hs.
Análisis I	10 a 14 hs.
Análisis II	14 a 18 hs.
Lineal	11 a 15 hs.
Avanzado	12 a 16 hs.
Complejo	9 a 13 hs.
Operativa	14 a 18 hs.
Estadística	14 a 18 hs.

Decidir si existe una forma de asignar aulas de forma que se puedan dictar todas las materias respetando los horarios. Modelar como un problema de grafos.

2. La secuencia  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  se dice gráfica si hay un grafo (simple) con secuencia de grados  $D$ .

- Mostrar que  $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$  y  $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$  no son secuencias gráficas.
- Si  $D$  es una secuencia gráfica tal que  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  entonces la suma  $\sum_{i=1}^n d_i$  es par y  $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(k, d_i)$  para  $1 \leq k \leq n$ .
- (difícil) Probar que vale la recíproca del ítem anterior, es decir, si se tiene una secuencia  $D$  que verifica esas condiciones entonces es una secuencia gráfica.

3. Encuentre todos los grafos  $G$  tales que  $G \cong \bar{G}$  que tengan 5 o menos vértices. ¿Puede encontrar un ejemplo con más vértices?

- Dibujar todos los grafos conexos de 4 vértices (salvo isomorfismo).
- Dibujar todos los grafos conexos de 5 vértices (salvo isomorfismo). Hint: 21

5. Sean  $G$  un grafo y  $A$  su matriz de adyacencia. Pruebe que  $A_{i,j}^n$  coincide con la cantidad de caminos (no necesariamente simples) de largo  $n$  que unen el vértice  $i$  con el vértice  $j$ .

- Caracterizar la matriz de adyacencia de un grafo bipartito.
- Probar que un grafo es bipartito si y sólo si para todo  $n$  impar los elementos de la diagonal de  $A^n$  son nulos ( $A$  es la matriz de adyacencia del grafo).

7. Probar que un grafo  $G = (V, E)$  es conexo si y sólo si para toda partición de  $V$  en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  ( $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$ ) hay un arco de  $G$  que une un punto de  $V_1$  con uno de  $V_2$ .

8. Probar que un grafo de  $n$  vértices que tiene más de  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  aristas es conexo.

9. Modificar el algoritmo BFS para que pueda detectar grafos bipartitos.

10. Sea  $G$  un grafo y  $T$  un árbol generador mínimo. Supongamos que  $e$  es la arista de mayor peso de un ciclo  $C$  de  $G$ . ¿Es cierto que necesariamente  $e \notin T$ ?

11. Sea  $G$  un grafo con pesos y supongamos que los pesos son todos distintos. Pruebe que  $G$  tiene un único árbol generador mínimo.
12. Sea  $T$  un árbol generador mínimo producido por el algoritmo de Prim. Pruebe que  $T$  contiene todas las aristas de peso mínimo salvo que estas incluyan un circuito.
13. Pruebe que en todo grafo conexo con más de un vértice hay al menos dos vértices que no son de corte (es decir, que al removerlos el grafo sigue siendo conexo).



Leonhard Euler  
1707 - 1783

Euler fue un matemático suizo que hizo enormes contribuciones a una amplia parte de la matemática y de la física incluyendo geometría, trigonometría, cálculo y teoría de números