Test de hipótesis.

Graciela Boente[1]

[1]Universidad de Buenos Aires and CONICET, Argentina

Ejemplo

Una firma sabe que en cada uno de los años anteriores los empleados han faltado un promedio de **6.3** días (sacando las vacaciones).

Este año la firma introdujo el sistema de **horarios flexibles** y eligió una muestra de 100 empleados para seguirlos a lo largo del año.

Al final del año esos empleados faltaron **un promedio de 5.4 días** al trabajo. El equipo de personal se reunió y esta es la conversación que mantienen.

- Investigador **(I)**. Entre otros hechos el horario flexible reduce el ausentismo que pasó de 6.3 a 5.4 días este año.
- Escéptico **(E)**. No es cierto. Su muestra es sólo de 100 empleados sobre los 5000 de la empresa; por la suerte de la elección han elegido a los empleados más trabajadores. Lo que usted muestra es sólo variación aleatoria. Cuál es el desvío estándar de su muestra?

I Los días de ausencia promediaron 5.4 con un desvío estándar de 3 días.

E Ve, la diferencia entre 6.3 y 5.4 es mucho menor que un desvío estándar; luego para mí es mero azar.

I Bueno, le daré mi explicación. Tiene a los 5000 empleados que son todos igualmente representativos, es como tener 5000 bolillas en una caja, una por cada empleado, que indica cuántos días faltó.
Ahora sacamos 100 bolillas y la única información que tenemos es sobre esas 100 bolillas. De acuerdo?

E Sí.

I Y lo que nos preocupa es conocer el promedio de la caja. Usted dice que aún es 6.3 y yo que descendió.

E Es cierto, digo que lo observó es debido a la casualidad porque hay demasiados números chicos en su muestra.

I Entiendo. Una cosa más, como no conocemos el desvío estándar poblacional lo podemos estimar por el de la muestra, o sea, por 3 días. De acuerdo?

E Sí.

I Bueno. Entonces ahora el error estándar (SE) para el promedio es $\dfrac{3}{\sqrt{100}} = 0.3$ días.
Luego supongamos que está en lo cierto y que el promedio de la población sea aún 6.3 días. Luego debería esperar que el promedio de la muestra esté alrededor de 6.3 y en realidad está más allá de 3 SE ya que $\dfrac{(5.4 - 6.3)}{0.3} = -3$.

E Hmm. . .

I Tenemos suficientes datos como para usar la aproximación normal a la distribución de los promedios y el área a la izquierda de -3 es aproximadamente 0.001.

E Es cierto.

I Bueno, ahora debe hacer su elección. O bien sigue sosteniendo que su promedio es 6.3 días o bien coincide conmigo en que el promedio de ausencia bajó.
Si se mantiene en su posición de 6.3 días, necesita un milagro casi para explicar los datos obtenidos pues sólo hay una posibilidad en mil de estar tan lejos de su valor esperado.

E Bueno, y cuánto piensa que es su valor promedio?

I Lo estimo por 5.4 ± 0.3 días. Tuvimos entonces una pequeña reducción en los días de ausencia pero es una reducción real, o sea, no la puedo atribuir al azar.

E Por lo tanto, esto muestra que el horario flexible reduce el ausentismo.

I No, sólo probamos que el ausentismo bajó. No era sólo debido a la suerte al elegir la muestra.

Este ejemplo muestra que el investigador trata de probar la validez de su hipótesis de real disminución del ausentismo por un cálculo aleatorio. Este cálculo es un *test de significación*.

Definiciones

- Hipótesis Nula: Se indica H_0, es la que sostiene que la diferencia observada se debe al azar

- Hipótesis Alternativa: Se indica H_1, es la que sostiene que la diferencia observada es real. En general es la hipótesis que uno quiere probar.

- Hipótesis simple: La hipótesis se dice simple si la suposición de que la hipótesis sea cierta lleva a una sóla función de probabilidad.

- Si esto no ocurre se dice Hipótesis compuesta.

Planteo general del problema

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$
- Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ y $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.
  Un test será una regla basada en $\mathbf{X}$ para decidir entre las dos hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

- Un *Test* es una una función $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$.

ϕ es *no aleatorizado* si toma los valores 0 ó 1.

Si el test toma valores distintos de 0 y 1 se dice que es un *test aleatorizado*.

Test de hipótesis

- $\phi(\mathbf{X}) = 1$ indica que rechazo H_0 y por lo tanto, se acepta H_1.
- $\phi(\mathbf{X}) = 0$ indica que no se rechaza H_0
- Si el test es *aleatorizado*

$$\phi(\mathbf{x}) = P(\text{rechazar } H_0 | \mathbf{X} = \mathbf{x})$$

- La *región crítica* $\mathcal{R}$, de un test ϕ, es el conjunto de puntos $\mathbf{X}$ que llevan a la decisión de rechazar H_0

- La *región de aceptación* $\mathcal{A}$ es el conjunto de puntos $\mathbf{X}$ que llevan a aceptar H_0.

Tipos de errores

	H_0 es cierta	H_1 es cierta
Decido aceptar H_0	BIEN	ERROR II
Decido aceptar H_1	ERROR I	BIEN

- Se llamará *error de tipo 1* al que se comete al rechazar H_0, cuando es verdadera.

$$\mathbb{P}(\text{ERROR I}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{R}) \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

- Se llamará *error de tipo 2* al que se comete al aceptar H_0, cuando es falsa.

$$\mathbb{P}(\text{ERROR II}) = 1 - \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{R}) \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

Potencia

- Se llama *función de potencia del test* $\phi(\mathbf{X})$ a la función

$$\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\text{rechazar } H_0) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{R}),$$

- Para todo test se tiene

$$\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\phi(\mathbf{X}))\ .$$

- $P(\text{ERROR I}) = \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$.

- $P(\text{ERROR II}) = 1 - \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Riesgo

- $d_0 =$ Decido aceptar H_0
- $d_1 =$ Decido aceptar H_1

$$
\begin{aligned}
L(\theta, d_0) &= I_{\Theta_1}(\theta) \\
L(\theta, d_1) &= I_{\Theta_0}(\theta) \\
R(\theta, \phi) &= L(\theta, d_1)\beta_\phi(\theta) + L(\theta, d_0)\,(1 - \beta_\phi(\theta)) \\
&= \begin{cases} 1 - \beta_\phi(\theta) & \theta \in \Theta_1 \\ \beta_\phi(\theta) & \theta \in \Theta_0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por qué aleatorizar

Muestra de $n = 10$ compradores, θ probabilidad de que un comprador elegido al azar compre un auto de esa marca.

$$H_0 : \theta = 1/2 \qquad \text{contra} \qquad H_1 \theta < 1/2$$

$X =$ número de compradores de autos de esa marca entre los 10 elegidos $X \sim Bi(10, \theta)$.

	0	1	2	3	4	5
0.5	0.00097	0.01074	0.05468	0.17187	0.37695	0.62304
0.4	0.00604	0.04635	0.16728	0.38228	0.63310	0.83376
0.3	0.02824	0.14931	0.38278	0.64961	0.84973	0.95265

Por qué aleatorizar

$$\phi_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq k \\ 0 & \text{si } X > k \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	5
0.5	0.00097	0.01074	0.05468	0.17187	0.37695	0.62304

$$\begin{aligned} \beta_{\phi_3}(0.5) &= 0.17187 < 0.25 \\ \beta_{\phi_4}(0.5) &= 0.37695 > 0.25 \end{aligned}$$

Por qué aleatorizar

$$\phi_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq k \\ 0 & \text{si } X > k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\phi_3}(0.5) &= 0.17187 < 0.25 \\ \beta_{\phi_4}(0.5) &= 0.37695 > 0.25 \end{aligned}$$

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X < 4 \\ \gamma = 0.074 & \text{si } X = 4 \\ 0 & \text{si } X > 4 \end{cases}$$

$\beta_\phi(0.5) = 0.25$

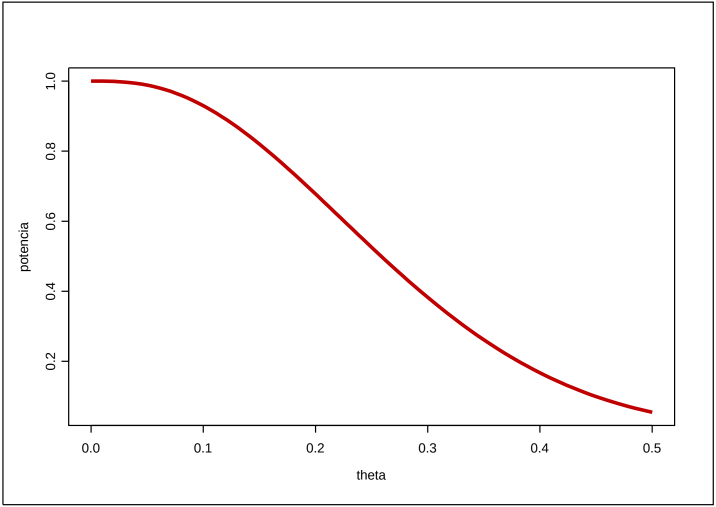
Potencia de $\phi_2(X)$

$$\phi_2(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq 2 \\ 0 & \text{si } X > 2 \end{cases}$$

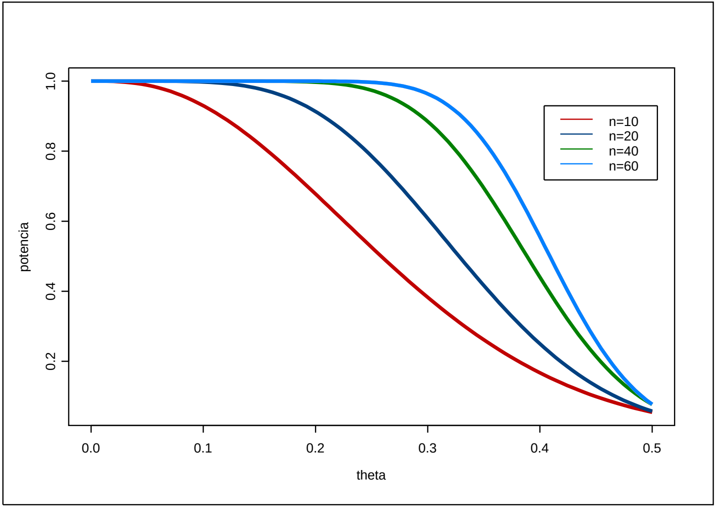
$\beta_{\phi_2}(0.5) = 0.05468$

	0	1	2	3	4	5
0.5	0.00097	0.01074	0.05468	0.17187	0.37695	0.62304
0.4	0.00604	0.04635	0.16728	0.38228	0.63310	0.83376
0.3	0.02824	0.14931	0.38278	0.64961	0.84973	0.95265

Función de Potencia



Función de Potencia



Nivel de significación

- El *nivel de significación* de un test ϕ:

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$$

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$
  ϕ es el test *más potente* de nivel menor o igual que α para una alternativa fija $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$ si
  (a) $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) \le \alpha$
  (b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\beta_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \le \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_1)$$

TEST UMP

- ϕ es un test *uniformemente más potente*, **UMP**, de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

si

(a) $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$

(b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\beta_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_1) \qquad \boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$$

Nivel Crítico

El *nivel crítico o p-valor* es el menor valor de significación para el que rechazamos la hipótesis H_0 para una observación dada $\mathbf{x}$.

El *nivel crítico o p-valor* da la probabilidad de obtener evidencia en contra de la hipótesis nula bajo el supuesto de que ésta sea cierta.

NO ES LA PROBABILIDAD DE QUE H_0 SEA CIERTA.

Teorema de Neyman Pearson

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

X es un vector discreto (o continuo) bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.
Las densidades correspondientes son $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$.

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) < k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \end{cases} \tag{1}$$

Teorema de Neyman Pearson

(i) Dado $0 < \alpha \leq 1$ se pueden elegir k_α y γ_α, $0 \leq \gamma_\alpha \leq 1$, tales que el test (1) satisfaga $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$.
Si $\alpha = 0$ el test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0 \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

tiene nivel 0.

(ii) Sea ϕ un test de la forma (1) que satisface $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$ para $\alpha > 0$ y de la forma (2) para $\alpha = 0$. Luego ϕ es el más potente de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

Teorema de Neyman Pearson

(iii) Si ϕ^* es un UMP de nivel $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

entonces ϕ^* es de la forma

$$\phi^*(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ \gamma_\alpha(\mathbf{x}) & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) < k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \end{cases} \tag{3}$$

excepto en $\mathcal{N}$ tal que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\mathcal{N}) = 0$.

(iv) Si ϕ^* es un UMP de nivel 0 para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

entonces ϕ^* es de la forma (2) excepto en $\mathcal{N}$ tal que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\mathcal{N}) = 0$.

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_1 es **UMP** de nivel α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$

- $\beta_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_2 es **UMP** de nivel α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$

- $\beta_{\phi_2}(\mu) = \Phi\left(-z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- ϕ_1 tiene función de potencia creciente
  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$
- ϕ_2 tiene función de potencia decreciente
  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$

Familias de CVM

Una familia de distribuciones discretas o continuas con densidad (o función de probabilidad puntual) $f(\mathbf{x}, \theta)$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}$ se dice de *cociente de verosimilitud monótono* (**CVM**) en $T = T(\mathbf{X})$, si para todo $\theta_1 < \theta_2$

(i) Las distribuciones correspondientes a $f(\mathbf{x}, \theta_1)$ y $f(\mathbf{x}, \theta_2)$ son distintas

(ii) $\dfrac{f(\mathbf{x}, \theta_2)}{f(\mathbf{x}, \theta_1)} = g_{\theta_1\theta_2}(T(\mathbf{x}))$, donde $g_{\theta_1\theta_2}(t)$ es una función no decreciente en el conjunto

$$\mathcal{S} = \{t : t = T(\mathbf{x}) \quad \text{con } f(\mathbf{x}, \theta_1) > 0 \text{ ó } f(\mathbf{x}, \theta_2) > 0\}$$

Familias de CVM: Teorema

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, *perteneciente a una familia de CVM en* $T = T(\mathbf{X})$. *Luego*

(i) Existen k_α y γ_α tales que

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } T = k_\alpha \\ 0 & \text{si } T < k_\alpha \end{cases} \tag{4}$$

satisface

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \alpha \,. \tag{5}$$

(ii) Sea ϕ es un test de la forma (4) que satisface (5). Luego ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \,.$$

Familias de CVM: Teorema

(iii) $\beta_\phi(\theta)$ es monótona no decreciente para todo θ y estrictamente creciente para todo θ tal que $0 < \beta_\phi(\theta) < 1$.

(iv) Sea ϕ un test de la forma (4) que satisface (5). Luego, ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \; .$$

Familias de CVM: Teorema

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$*, perteneciente a una familia de CVM en* $T = T(\mathbf{X})$*. Luego*

(i) Existen k_α y γ_α tales que

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } T = k_\alpha \\ 0 & \text{si } T > k_\alpha \end{cases} \tag{6}$$

satisface

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \alpha\ . \tag{7}$$

(ii) Sea ϕ es un test de la forma (6) que satisface (7). Luego ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta < \theta_0\ .$$

Familias de CVM: Teorema

(iii) $\beta_\phi(\theta)$ es monótona no creciente para todo θ y estrictamente decreciente para todo θ tal que $0 < \beta_\phi(\theta) < 1$.

(iv) Sea ϕ un test de la forma (6) que satisface (7). Luego, ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \,.$$

Riesgo

- $d_0 =$ Decido aceptar H_0
- $d_1 =$ Decido aceptar H_1

$$
\begin{aligned}
L(\theta, d_0) &= I_{\Theta_1}(\theta) \\
L(\theta, d_1) &= I_{\Theta_0}(\theta) \\
R(\theta, \phi) &= L(\theta, d_1)\beta_\phi(\theta) + L(\theta, d_0)\left(1 - \beta_\phi(\theta)\right) \\
&= \begin{cases} 1 - \beta_\phi(\theta) & \theta \in \Theta_1 \\ \beta_\phi(\theta) & \theta \in \Theta_0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Clase Esencialmente Completa

a) Un test ϕ_1 se dice *tan bueno como* ϕ_2 si

$$R(\theta, \phi_1) \leq R(\theta, \phi_2) \quad \forall \theta \in \Theta$$

b) Un test ϕ_1 se dice *mejor que* ϕ_2 si

$$\begin{array}{rccc} & R(\theta, \phi_1) & \leq & R(\theta, \phi_2) \quad \forall \theta \in \Theta \\ \exists\, \widetilde{\theta}: & R(\widetilde{\theta}, \phi_1) & < & R(\widetilde{\theta}, \phi_2) \end{array}$$

- Una clase $\mathcal{C}$ se dice *esencialmente completa* si $\forall\, \phi \notin \mathcal{C}$, $\exists\, \phi_0 \in \mathcal{C}$ tal que ϕ_0 es *tan bueno como* ϕ.

Clase Esencialmente Completa: Corolario

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, perteneciente a una familia de CVM en $T = T(\mathbf{X})$.
Para todo test ϕ^* y $\theta_0 \in \Theta$ tal que $0 < \mathbb{E}_{\theta_0}(\phi^*) < 1$, existe un test ϕ de la forma (4) tal que

$$\begin{cases} \beta_\phi(\theta) \leq \beta_{\phi^*}(\theta) & \forall\, \theta \leq \theta_0 \\ \beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) & \forall\, \theta \geq \theta_0 \end{cases}$$

La clase $\mathcal{C}$ de los tests de la forma (4) es esencialmente completa para este problema tomando como pérdida los indicadores.

Lema de Neyman Pearson generalizado

Sean $f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_\ell(\mathbf{x})$ funciones integrables en $\mathbb{R}$. Sea $\phi_0(\mathbf{x})$ cualquier función integrable de la forma

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_0(\mathbf{x}) > \sum_{i=1}^{\ell} k_i f_i(\mathbf{x}) \\ \gamma(\mathbf{x}) & \text{si } f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} k_i f_i(\mathbf{x}) \\ 0 & \text{si } f_0(\mathbf{x}) < \sum_{i=1}^{\ell} k_i f_i(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{8}$$

Lema de Neyman Pearson generalizado

a) ϕ_0 maximiza $\displaystyle\int \phi(\mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ entre todas las funciones $0 \leq \phi \leq 1$ tales que

$$\int \phi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \phi_0(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad 1 \leq j \leq \ell$$

b) Si además $k_j \geq 0$ entonces ϕ_0 maximiza $\int \phi(\mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ entre todas las funciones $0 \leq \phi \leq 1$ tales que

$$\int \phi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int \phi_0(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad 1 \leq j \leq \ell$$

Lema de Neyman Pearson generalizado

c) Si ϕ^* maximiza $\int \phi(\mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ entre todas las funciones $0 \leq \phi \leq 1$ tales que

$$\int \phi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \phi^*(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad 1 \leq j \leq \ell$$

entonces ϕ^* es de la forma (8)

$$H_0: \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad H_1: \ \theta > \theta_2 \text{ o } \theta < \theta_1$$

$$f(x,\theta) = A(\theta) \ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Diremos que ϕ es un bilateral si es de la forma

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases} \tag{9}$$

$0 \leq \gamma_i \leq 1$, $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq +\infty$

$$H_0 : \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad H_1 : \ \theta > \theta_2 \text{ o } \theta < \theta_1$$

$$f(x,\theta) = A(\theta) \ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Sean ϕ^* un test cualquiera y sean $\theta_1 < \theta_2$. Entonces

a) Existe un test bilateral ϕ tal que $\beta_\phi(\theta_i) = \beta_{\phi^*}(\theta_i)$, $i = 1, 2$.

b) Dado cualquier test bilateral ϕ que cumpla a) se tiene

$$\beta_\phi(\theta) - \beta_{\phi^*}(\theta) = \begin{cases} \leq 0 & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \geq 0 & \theta < \theta_1 \quad \text{o} \quad \theta > \theta_2 \end{cases}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\beta_\phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\mathbf{X}\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_\theta(\phi(\mathbf{X}))\ \mathbb{E}_\theta(\mathbf{X})$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$f(x, \theta) = A(\theta) \exp\{\theta x\} h(x)$$

Sean ϕ^* un test cualquiera y sean $\theta_0 \in \Theta$. Entonces

a) Existe un test bilateral ϕ tal que

$$\beta_\phi(\theta_0) = \beta_{\phi^*}(\theta_0) \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\beta_\phi(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{\partial}{\partial\theta}\beta_{\phi^*}(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} \tag{11}$$

b) Dado cualquier test bilateral ϕ que cumpla (10) y (11) se tiene

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \quad \forall\theta$$

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si
  - i) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$
  - ii) ϕ es insesgado
  - iii) para todo ϕ^* tal que $\begin{cases} \text{a)} & \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\phi^*}(\theta) = \alpha \\ \text{b)} & \phi^* \text{ es insesgado} \end{cases}$

    se verifica

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

TEST IUMP: $H_0: \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad H_1: \ \theta > \theta_2$ o $\theta < \theta_1$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Todo test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_i) = \alpha$$

es **IUMP de nivel α** para H_0 versus H_1.

TEST IUMP: $H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Todo test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_0) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\beta_\phi(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$$

es **IUMP de nivel α** para H_0 versus H_1.

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \\ f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) > k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) = k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) < k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{L_{10}} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \leq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L^*(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

Distribución $\mathcal{T}_n(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad* Δ: $\mathcal{T}_n(\Delta)$ es la distribución de

$$\frac{U+\Delta}{\sqrt{V/n}}$$

con $U \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2_n$ y además U y V son independientes.

- Sea $X_\Delta \sim \mathcal{T}_n(\Delta)$,

$$c_{n,k}(\Delta) = P(X \geq k),$$

$\Longrightarrow c_{n,k}(\Delta)$ es una función monótona creciente de Δ.

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

cumple

$$\beta_\phi(\mu_0, \sigma) = \alpha \qquad \forall\ \sigma$$

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

Sea $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$,

$$\boldsymbol{\beta_\phi(\mu, \sigma^2) = \mathrm{P}_{\mu,\sigma^2}(\mathrm{T} \geq \mathrm{t}_{n-1,\alpha}) = \mathrm{c}_{n-1,\mathrm{t}_{n-1,\alpha}}(\Delta)} \; .$$

$$\sup_{\substack{\mu \leq \mu_0 \\ \sigma > 0}} \beta_\phi(\mu, \sigma^2) = \beta_\phi(\mu_0, 1)$$

Test con nivel asintótico

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $X_i \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$
- $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ contra $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Se dirá que una sucesión de test $\phi_n(X_1, \ldots, X_n)$ tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \beta_{\phi_n}(\boldsymbol{\theta}) = \alpha$$

Distribución asintótica del test de CMV

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ que contiene una esfera.
- Θ_0 es un conjunto de dimensión $p - j$, $1 \leq j \leq p$.
- $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} .$$

Bajo condiciones de regularidad generales en $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$,
$-2 \ln L^*(\mathbf{X}) \xrightarrow{D} \chi^2_j$ cuando $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$.

Distribución asintótica del test de CMV

$\Longrightarrow$ Un test de nivel de significación asintótico α está dado por

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2\ln L^*(\mathbf{X}) \geq \chi^2_{j,\alpha} \\ 0 & \text{si} \quad -2\ln L^*(\mathbf{X}) < \chi^2_{j,\alpha} \end{cases}$$

Distribución asintótica del test de CMV

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim f(x, \theta)$ con $\theta \in \Theta$ y Θ un abierto en $\mathbb{R}$. Sea $f(\mathbf{x}, \theta)$ la densidad conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones

(A) *El conjunto $\mathcal{S} = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ es independiente de θ.*

(B) *Para todo $x \in \mathcal{S}$, $f(x, \theta)$ tiene derivada tercera respecto de θ continua y tal que*

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^3 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^3}\right| &= \left|\frac{\partial^2 \psi(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right| \leq K \quad \forall\, x \in \mathcal{S} \quad \forall\, \theta \in \Theta \\
\psi(x, \theta) &= \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} .
\end{aligned}
$$

Distribución asintótica del test de CMV

(C) *Si* $h(\mathbf{X})$ *es un estadístico tal que* $E_\theta[|h(\mathbf{X})|] < \infty$, $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)d\mathbf{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})\frac{\partial f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta}d\mathbf{x}$$

(D) $0 < I_1(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] < \infty$.

Sea $\widehat{\theta}_n$ *un EMV de* θ *consistente,*

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{X},\theta)} = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{f(\mathbf{X},\widehat{\theta}_n)} .$$

$$\Longrightarrow \qquad U = -2\ln\left(L^*(\mathbf{X})\right) \xrightarrow{D} \chi^2_1$$

Distribución asintótica del test de CMV

El test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad U \geq \chi^2_{1,\alpha} \\ 0 & \text{si} \quad U < \chi^2_{1,\alpha} \end{cases}$$

donde $U = -2\ln\left(L^*(\mathbf{X})\right)$, tiene nivel de significación asintótico α.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$
- $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \theta_j T_j(\mathbf{x})\right\} \widetilde{h}(\mathbf{x})$

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \theta_j \, t_j\right\} h(\mathbf{t})$$

- $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

- Un test ϕ se dice $\alpha-$**similar** en un conjunto Θ_B si $\beta(\theta) = \alpha$ $\forall\, \theta \in \Theta_B$

- Un test ϕ se dice **similar** en Θ_B si existe α tal que ϕ es $\alpha-$similar en Θ_B

- Un test ϕ se dice **UMP** $\alpha-$**similar** para
$$\mathbf{H_0 :\ \theta \in \Theta_0} \quad \text{versus} \quad \mathbf{H_1 :\ \theta \in \Theta_1} \text{ si}$$

  i) ϕ es $\alpha-$**similar** en $\Theta_B = \overline{\Theta_0} \cap \overline{\Theta_1}$
  ii) Dado ϕ^* $\alpha-$**similar** en Θ_B se tiene
$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \quad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

Teorema. *Consideremos el problema*

$$\mathbf{H_0}: \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta_0} \quad \textit{versus} \quad \mathbf{H_1}: \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta_1}$$

Si

- *para cada test ϕ la función de potencia $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ es continua en $\boldsymbol{\theta}$*
- ϕ_0 *es* **UMP** $\alpha-$**similar** para $\mathbf{H_0}$ versus $\mathbf{H_1}$
- ϕ_0 tiene **nivel** α para $\mathbf{H_0}$ versus $\mathbf{H_1}$

entonces ϕ_0 *es* **IUMP de nivel** α.

- Sea T suficiente para $\theta \in \Theta_B$. Un test ϕ UMP $\alpha-$similar en Θ_B se dice que tiene **estructura de Neymann** si

$$\mathbb{E}\left(\phi(\mathbf{X})\Big| T = t\right) = \alpha \quad \forall t \notin \mathcal{N} \quad \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathcal{N}\right) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

- Si T es un estadístico suficiente acotadamente completo para $\theta \in \Theta_B$, entonces todo test $\alpha-$similar en Θ_B tiene **estructura de Neymann**.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros

- $f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} \theta_j \, t_j \right\} h(\mathbf{t})$
- $\mathbf{H_0} : \ \theta_1 \leq \theta_1^0$ versus $\mathbf{H_1} : \ \theta_1 > \theta_1^0$
- $\mathbf{T}^* = (T_2, \ldots, T_p)$ es suficiente para $\boldsymbol{\theta}^* = (\theta_2, \ldots, \theta_p)$ y

$$f_{T_1 | \mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*}(t_1, \theta_1) = c(\theta_1) e^{\theta_1 \, t_1} \, h^*(t_1)$$

- Consideremos el test condicional

$$\phi(T_1, \mathbf{t}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 > k_\alpha(\mathbf{t}^*) \\ \gamma_\alpha(\mathbf{t}^*) & \text{si } T_1 = k_\alpha(\mathbf{t}^*) \\ 0 & \text{si } T_1 < k_\alpha(\mathbf{t}^*) \end{cases} \tag{12}$$

donde las funciones $k_\alpha(\mathbf{t}^*)$ y $\gamma_\alpha(\mathbf{t}^*)$ satisfacen

$$\mathbb{E}_{\theta_1^0}(\phi(\mathbf{T})|\mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = \alpha\ .$$

- Si ϕ es medible, se tiene
  a) ϕ es un test de nivel α para $\mathbf{H_0}: \theta_1 \leq \theta_1^0$ vs $\mathbf{H_1}: \theta_1 > \theta_1^0$
  b) ϕ es el test **IUMP** de nivel α.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros: Hipótesis bilaterales

$$H_0 : \theta_1^1 \leq \theta_1 \leq \theta_1^2 \text{ vs } H_1 : \theta_1 < \theta_1^1 \quad \text{o} \quad \theta_1 > \theta_1^2$$

$$\phi(T_1, \mathbf{t}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 < k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) \text{ o } T_1 > k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \\ \gamma_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) & \text{si } T_1 = k_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{si } k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) < T_1 < k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \end{cases}$$

donde las funciones $k_\alpha(\mathbf{t}^*)$ y $\gamma_\alpha(\mathbf{t}^*)$ satisfacen

$$\mathbb{E}_{\theta_1^1}(\phi(\mathbf{T})|\mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = \mathbb{E}_{\theta_1^2}(\phi(\mathbf{T})|\mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = \alpha \, .$$

- Si ϕ es medible, se tiene
  - a) ϕ es un test de nivel α para $\mathbf{H_0} : \theta_1^1 \leq \theta_1 \leq \theta_1^2$ vs $\mathbf{H_1} : \theta_1 < \theta_1^1 \quad \text{o} \quad \theta_1 > \theta_1^2$
  - b) ϕ es el test **IUMP** de nivel α.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros: Hipótesis bilaterales

$$H_0 : \ \theta_1 = \theta_1^0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \ \theta_1 \neq \theta_1^0$$

$$\phi(T_1, \mathbf{t}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 < k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) \text{ o } T_1 > k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \\ \gamma_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) & \text{si } T_1 = k_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{si } k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) < T_1 < k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \end{cases}$$

donde las funciones $k_\alpha(\mathbf{t}^*)$ y $\gamma_\alpha(\mathbf{t}^*)$ satisfacen

$$E_{\theta_1^0}(\phi(\mathbf{T}) | \mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = \alpha \quad E_{\theta_1^0}\left[(\phi(\mathbf{T}) - \alpha) \, T_1 | \mathbf{T}^* = \mathbf{t}^* \right] = 0.$$

- Si ϕ es medible, se tiene
  - a) ϕ es un test de nivel α para $\mathbf{H_0} : \ \theta_1 = \theta_1^0$ vs $\mathbf{H_1} : \ \theta_1 \neq \theta_1^0$
  - b) ϕ es el test **IUMP** de nivel α.