A) Intervalos de confianza para una muestra.

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ (σ_0^2 conocido). Supóngase que se pide un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$. Mostrar que al elegir $A = z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $B = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene el intervalo de longitud mínima entre los contruidos considerando $A = z_\beta$ y $B = z_{1-\delta}$, con $\beta + \delta = \alpha$. En base al intervalo de confianza, construir un test para las hipótesis

$$\mathsf{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad \mathsf{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

2. Se trata de medir el período de un péndulo y se tiene un cronómetro de precisión conocida (es decir, se conoce la varianza del error). Se supone que las observaciones son de la forma $Y_i = \mu + \varepsilon_i$, donde los ε_i tienen distribución $N(0, 1/4)$ y son independientes. Los datos obtenidos son:

$$5.1 \quad 5.2 \quad 5.6 \quad 5.1 \quad 5.5 \quad 5.8 \quad 5.9 \quad 4.9 \quad 5.2 \quad 5.6$$

   (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.

   (b) ¿Cuál debería haber sido el tamaño de la muestra si se hubiera deseado que la longitud del intervalo fuese a lo sumo 0.10?

3. La distribución del índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar entre esta población y se obtienen los siguientes valores:

1.52	1.65	1.72	1.65	1.72	1.83	1.62	1.75	1.72	1.68	1.51	1.65	1.58
1.65	1.61	1.70	1.60	1.73	1.61	1.52	1.81	1.72	1.50	1.82	1.65	

   (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.

   (b) ¿Cuántos datos adicionales deben obtenerse para poder construir un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95 pero con una longitud no mayor que 0.05? ¿Qué forma tendría este intervalo?

   (c) Encontrar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.

   (d) Encontrar un intervalo de confianza para $\exp(-\mu)$ de nivel 0.95.

4. (a) Probar que si X tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$, entonces $Y = 2\lambda X$ tiene distribución χ_2^2.

   (b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Mostrar que $T = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución χ_{2n}^2.

   (c) En base a $b)$ hallar una familia de intervalos de confianza para λ de nivel $1-\alpha$.

   (d) En base a $c)$ hallar una familia de tests de nivel α para el problema

$$\mathsf{H}_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs \quad \mathsf{H}_1 : \lambda \neq \lambda_0$$

   ¿Cuál de ellos se corresponde con el test IUMP de nivel α? ¿Coincide con el proveniente del intervalo de longitud mínima?

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $U[0, \theta]$ y sea $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

   (a) Mostrar que T/θ tiene distribución independiente de θ.

   (b) Usando $a)$ hallar un intervalo de confianza de longitud mínima para θ de nivel $1-\alpha$.

B) Intervalos de confianza para dos muestras.

6. Se desea comparar los rendimientos de dos variedades de trigo A y B. Se han cultivado 15 parcelas elegidas al azar con la variedad A y 20 con la variedad B, obteniéndose los siguientes rendimientos por hectárea:

Var. A:	250	252	245	258	240	247	251	249	250	243	247	260	238	241	239
Var. B:	330	335	327	329	320	332	337	328	334	326	331	332	328	329	337
	341	336	338	325	321										

Se supone que los rendimientos de la variedad A tienen distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ y los de la otra variedad $N(\mu_2, \sigma^2)$, independientes entre sí.

(a) Hallar un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de nivel 0.99.

(b) ¿Qué le sugeriría el hecho de que el 0 no pertenezca al intervalo hallado? ¿Qué pensaría en caso contrario?

(c) Hallar un intervalo de confianza para σ^2 de nivel 0.99.

(d) Hallar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.

7. Sea $X_1, \ldots, X_{n_1}$ una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$; las muestras son independientes entre sí. Llamemos s_1^2 y s_2^2 a las varianzas muestrales respectivas.

(a) Probar que
$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1}.$$

(b) Deducir un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 de nivel $1-\alpha$.

(c) ¿Que podría deducir si 1 no pertenece a este intervalo?¿Y en caso contrario?

8. Se tienen dos variedades de trigo A y B. Se eligen al azar 15 parcelas, y cada una de ellas se divide en dos partes iguales. En una parte se cultiva la variedad A y en la otra la B. Se obtienen así 15 pares de datos:

Parcela:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Var. A:	41	37	36	39	44	42	38	37	35	32	39	30	40	41	37
Var. B:	39	35.3	33.5	36	42.5	38	36	34.8	33.2	29	29	36.6	28.4	38.5	39

Sea X_i el rendimiento de la variedad A en la parcela i e Y_i el rendimiento de la variedad B en la misma parcela. Se supone que (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq 15$, es una muestra de una distribución normal bivariada con parámetros desconocidos. Hallar un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ de nivel 0.95.

C) Intervalos de confianza con nivel asintótico.

9. (a) Dada una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1,p)$, construir un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$.

(b) Una droga cura cierta enfermedad con probabilidad p. En una prueba con 100 enfermos, se curaron 30.

i. Hallar un intervalo de confianza para p de nivel asintótico 0.95.

ii. ¿Qué tamaño de muestra debería tomarse si se desea una longitud menor que 0.1?

10. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel asintótico $1-\alpha$.

    (b) El número de llamadas diarias a una central telefónica sigue un proceso de Poisson con media λ. Se ha registrado el número de llamadas durante 20 días, obteniéndose los siguientes valores:

$$\begin{matrix} 35 & 41 & 38 & 40 & 34 & 36 & 41 & 48 & 42 & 46 \\ 39 & 37 & 41 & 35 & 37 & 38 & 42 & 43 & 44 & 67 \end{matrix}$$

    Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel asintótico 0.90.

11. (a) Supóngase que $X_1, \ldots, X_{n_1}$ es una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ es una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, independiente de la anterior. Mostrar que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

    cuando $n_1 \to \infty$ y $n_2 \to \infty$ de modo que $n_1/n_2 \to \lambda$ constante.

    (b) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $(1-\alpha)$ para $\mu_1 - \mu_2$.

D) Ejercicios para hacer en la computadora.

1. Realizar el siguiente estudio de simulación. Generar una muestra aleatoria de variables $X_i \sim Bi(n,p)$ con $(1 \leq i \leq k)$. Para cada variable aleatoria X_i construir los tres intervalos de confianza para p de nivel (asintótico o exacto según corresponda) 0.95 vistos en clase. De este modo se consiguen k intervalos de confianza, construídos a través del método 1, k a través del método 2 y k a través del método 3.

    - Método 1: de nivel asintótico cuando se sustituye el valor de p en la varianza por $\bar{X}$.
    - Método 2: de nivel asintótico cuando no se sustituye a p y se calcula los extremos del intervalo como raíces de una cuadrática.
    - Método 3: de nivel exacto.

    Tomar $k = 2000$ y los siguientes valores de n y p.

    - $n = 20; 50; 100.$
    - $p = 0.10; 0.50.$

    Para cada muestra X_i guardar los siguientes resultados : el intervalo de confianza obtenido, la longitud de dicho intervalo, un 1 si el IC hallado contiene al verdadero valor de p y un 0 en caso contrario.

    Para cada combinación de n y p:

    (a) Estimar la longitud esperada para ambos métodos.

    (b) Estimar la probabilidad de cobertura para ambos métodos.

    (c) Sacar conclusiones.