Elementos de Cálculo Numérico (M) - Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre de 2015

Práctica N°3: Métodos iterativos para sistemas lineales.

Ejercicio 1. Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, con las siguientes condiciones:

- que indique si el método resulta o no convergente para la matriz A,
- que incluya una restricción al número de iteraciones,
- que finalice si el método se estaciona.

Sugerencia: utilizar los comandos `tril`, `diag` y `eig` de Octave

Ejercicio 2. Hacer un programa que reciba como input una matriz A y un vector b y luego

a) calcule las matrices de iteración de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel,

b) calcule el menor de los radios espectrales de las dos matrices anteriores y, si este valor resulta menor a 1, entonces realice las primeras 10 iteraciones del método correspondiente (o de cualquiera de los dos métodos en caso de que los radios espectrales resulten coincidentes), con el vector nulo como solución inicial.

Ejercicio 3. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿Y simétrica y definida positiva?

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Dar ejemplos donde converja el método de Jacobi y no lo haga el de Gauss-Seidel y viceversa.

Ejercicio 5. Considerar el sistema $\left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 0 \\ x + y = & 0 \end{array} \right.$. Estudiar autovalores y autovectores de la matriz de iteración asociada al método de Gauss-Seidel, decidir si el método es convergente y, sin hacer cálculos, predecir el comportamiento de las sucesiones que se obtienen con los siguientes valores iniciales.

(a) $x_0 = (2, 0)$ (b) $x_0 = (-0.03, 0.03)$ (c) $x_0 = (0, 1)$

Decidir si en este caso el método de Jacobi resulta convergente.

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = M + N$ con M inversible y $\|M^{-1}N\| < 1$ para alguna norma. Probar que A es inversible.

Ejercicio 7. Mostrar que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\det(A) > 1$ tiene un autovalor λ con $|\lambda| > 1$. Decidir si el método de Jacobi converge para un sistema dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel aplicados a la resolución de $Ax = v$.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que $\lambda = 1$ es autovalor de la matriz de Jacobi (o Gauss-Seidel) de A si y solo si A no es inversible.

Ejercicio 10. Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $A_n x = b_n$ para

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2}).$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene ésto que ver con el mal condicionamiento de A? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

Ejercicio 11. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J. Hallar una norma $\|\ \|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1.