Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Elementos de Cálculo Numérico (M) - Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre 2015

Práctica N°1: Aritmética de punto flotante. Error de redondeo.

Definición. Para una sucesión convergente (a_n) con límite l definimos su orden de convergencia como el supremo de los números p tales que la sucesión

$$\frac{|a_{n+1} - l|}{|a_n - l|^p}$$

es acotada.

Ejercicio 1 a) Calcular el orden de convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{(i)} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(ii)} \quad b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n^2} \qquad \text{(iii)} \quad c_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{2^n}$$

b) Hacer un programa en `Octave` que calcule los primeros 25 términos de las sucesiones del ítem anterior y observar la velocidad con la que cada una de ellas tiende al límite.

Ejercicio 2 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con límite l. Demostrar que si existen $p, c \in \mathbb{R},\ p, c > 0$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - l|}{|a_n - l|^p} = c,$$

entonces el orden de convergencia de la sucesión es p.

Ejercicio 3 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) $\frac{n+1}{n^2} = O(\frac{1}{n})$

b) $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{n \ln n})$

c) $\frac{1}{n \ln n} = o(\frac{1}{n})$

d) $\sqrt{x^2+1} + \sin(x) = O(x) \qquad (x \to \infty)$

e) $\frac{1}{x^2} = O(\frac{1}{x}) \qquad (x \to 0)$

f) $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{x^2}) \qquad (x \to 0)$

Ejercicio 4 Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Demostrar que $x_n = x + o(1)$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 5 Demostrar que:

a) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \qquad (x \to 0)$

b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \qquad (x \to 0)$

Ejercicio 6 Utilizando el método de redondeo:

a) Hallar el número de máquina más próximo a 125.6 y a 126 si trabaja con

- Base 10 y mantisa de 2 dígitos.
- Base 2 y mantisa de 8 dígitos.

b) Verificar, para $x = 125.6$, la conocida cota para el error relativo

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq \varepsilon$$

si $\varepsilon = 1/2\beta^{1-d}$ donde β es la base y d la longitud de la mantisa.

c) ¿Cuál es, en cada caso, el valor que da la máquina como resultado de las operaciones $126 + 125.6$ y $126 - 125.6$? ¿Cuál es el error relativo de estos resultados?

Ejercicio 7 Mostrar que $fl(x)$ tiene (para ambos métodos) una escritura de la forma

$$fl(x) = x(1 + \delta_x)$$

donde $|\delta_x| \leq \varepsilon$. (Usar la cota para el error relativo).

Ejercicio 8 Pérdida de dígitos significativos:

a) Si x e y tienen el mismo signo, demostrar que

$$\left|\frac{x + y - fl(fl(x) + fl(y))}{x + y}\right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Observar que en la expresión $2\varepsilon + \varepsilon^2$ el valor de ε^2 es despreciable dado que ε es pequeño.

b) Si x e y no poseen el mismo signo, ¿puede repetir la misma cuenta? (Sugerencia: recordar el error relativo de $126 - 125.6$ en el ejercicio 6, item (c), utilizando la computadora binaria con mantisa de 8 dígitos.)

Ejercicio 9 a) Sean a y b dos números de máquina. Demostrar que el error relativo que se comete al calcular a^2b con aritmética de punto flotante se puede acotar por $2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

b) Demostrar que si en cambio $a, b \in \mathbb{R}$ son dos números reales arbitrarios, entonces dicho error se puede acotar por $6\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Ejercicio 10 Un ejemplo que muestra que algunas de las reglas de la aritmética no son válidas para operaciones de punto flotante.

1. Intentar anticipar el resultado de los siguientes cálculos:

   (i) $(1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}$ (ii) $1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$
   (iii) $\big((1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}\big) - 1$ (iv) $\big(1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})\big) - 1$

2. Efectuar estos cálculos usando `Octave` y comprobar las predicciones hechas.

Ejercicio 11 Hallar la raíz menor en módulo de la ecuación

$$x^2 - 40x + 0.25 = 0,$$

utilizando aritmética de 4 dígitos y comparar con el resultado obtenido utilizando aritmética exacta. Calcular el error relativo y asegurarse de comprender de dónde viene la pérdida de dígitos significativos. ¿Se le ocurre cómo calcular con mayor precisión dicha raíz? ¿Cuál es el error relativo con el nuevo método?

Ejercicio 12 Hallar una forma de calcular sin pérdida de dígitos significativos las siguientes cantidades, para $x \sim 0$:

(a) $(\alpha + x)^n - \alpha^n$
(b) $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - x}$
(c) $\cos x - 1$
(d) $\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha)$

Ejercicio 13 Se pretende calcular las sumas $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$ con $N \in \mathbb{N}$. Llamemos $\widehat{S_1} = fl(a_1)$, $\widehat{S_N} = fl(\widehat{S_{N-1}} + fl(a_N))$, para $N > 1$.

1. $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$. Mostrar que $\widehat{S_N}$ se estaciona a partir de algún N suficientemente grande. Deducir que a partir de entonces $S_N \neq \widehat{S_N}$.

2. Idem 1 para la suma $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{2^{-k+100} + 1}{k}$. Encontrar, haciendo un programa en `Octave`, el valor de N para el cual $\widehat{S_N}$ se estaciona.

Ejercicio 14 El desarrollo de Taylor de la función e^x proporciona una forma muy inestable de calcular este valor cuando x es negativo. Hacer un programa en `Octave` que estime e^{-12} evaluando el desarrollo de Taylor hasta grado n de la función e^x en $x = -12$, para $n = 1, \ldots, 100$. Comparar con el valor exacto: $0.000006144212353328210\ldots$ ¿Cuáles son las principales fuentes de error? Realizar otra estimación de e^{-12} con algún otro método que evite los problemas del método anterior (Sugerencia: Considerar $e^{-x} = 1/e^x$).

Ejercicio 15 Calcular en `Octave` los valores: $\text{sen}(\pi/2 + 2\pi 10^j)$ con $1 \leq j \leq 25$. ¿Cuánto debería dar? ¿Qué está pasando?